

CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

Leonardo Azevedo Massulo

**ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS EM LAJES NERVURADAS CONSIDERANDO
MODELOS NÃO LINEARES POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Santa Cruz do Sul

2017

Leonardo Azevedo Massulo

**ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS EM LAJES NERVURADAS CONSIDERANDO
MODELOS NÃO LINEARES POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade de Santa Cruz do Sul para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Ms. Christian Donin

Santa Cruz do Sul
2017

Leonardo Azevedo Massulo

**ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS EM LAJES NERVURADAS CONSIDERANDO
MODELOS NÃO LINEARES POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi submetido ao Curso de Engenharia Civil da Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Prof. MSc. Christian Donin
Professor orientador - UNISC

Prof. Dr. Eduardo Rizzatti
Professor examinador - UFSM

Prof. MSc. Henrique Luiz Rupp
Professor examinador - UNISC

Santa Cruz do Sul
2017

Dedico esse trabalho à minha família, em especial aos meus pais, os quais sempre me apoiaram nas minhas escolhas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo aos meus pais, Roberto e Maria, por todo apoio e incentivo, por todos os ensinamentos, virtudes e princípios a mim repassados, bem como pela compreensão nos momentos em que estive ausente.

Agradeço também aos meus irmãos, Dayane e Vinícius, pelos exemplos de profissionais e pessoas a serem seguidos, e por me darem os melhores presentes que já recebi, meus sobrinhos e afilhados, Lorenzo e Valentina, os quais me inspiram diariamente a não desistir dos meus objetivos.

A todos os colegas que eu tive ao longo da graduação, em especial a Caroline Rezende, Gabriel Hauschild, Giulia Rodrigues, Isadora Paczek, Johnathan Alves e Julia Amanda Becker, por todos os momentos compartilhados e pela amizade.

Agradeço também a todos os professores da graduação por todo conhecimento a mim aferidos durante esses cinco anos, em especial, às professoras Adriane Lawisch Rodriguez, Cláudia Mendes Mählmann e Camila Crauss, pela oportunidade de participarem de suas pesquisas.

Em especial, agradeço ao meu orientador, Christian Donin, pelos ensinamentos, incentivo, confiança e apoio, os quais foram fundamentais para a realização desse trabalho.

E por fim, agradeço a todos engenheiros, arquitetos e outros profissionais com os quais eu tive a oportunidade de trabalhar ao longo da graduação, e que foram fundamentais para complementar os conhecimentos adquiridos em sala de aula.

“Sou movido por duas filosofias principais: saber mais sobre o mundo hoje do que eu sabia ontem e diminuir o sofrimento dos outros. Você ficaria surpreso o quão longe isso pode te levar.”

Neil deGrasse Tyson

RESUMO

Devido ao crescente uso, as lajes nervuradas tem sido alvo de diversas pesquisas nos últimos anos de forma a melhorar os procedimentos de determinação das solicitações, bem como de previsão de deslocamentos. Uma das formas que tem sido estudadas para melhorar os procedimentos de cálculo desse tipo de estrutura é a utilização do método dos elementos finitos. Além disso, outra forma de melhorar a precisão na determinação do comportamento de estruturas em concreto armado é a inclusão da não linearidade dos materiais concreto e aço, bem como a consideração da fissuração do concreto. Logo, este trabalho visa contribuir para a análise estrutural de lajes nervuradas através do método dos elementos finitos utilizando um modelo não linear. O modelo de análise utilizado neste trabalho foi empregado no programa computacional ANSYS 16.1, no qual as estruturas foram discretizadas com o elemento tridimensional SOLID65, aplicando modelos constitutivos dos materiais presentes na NBR 6118:2014, além do critério de Von Mises para o aço e o critério de Willam e Warnke para o concreto. O modelo foi empregado em duas aplicações de lajes nervuradas, no qual cada uma consiste em ensaios experimentais presentes na literatura. A primeira aplicação consistiu em quatro das lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000), as quais tinham dimensões de 150 x 150 cm e foram submetidas a uma carga centrada numa placa de 30 x 30 cm. E a segunda consistiu na laje nervurada bidirecional ensaiada por Bastos (2016), a qual foi submetida a um carregamento uniformemente distribuído sobre a laje em pequenos incrementos de carga. Os resultados mostraram que o comportamento das lajes pelo modelo adotado neste trabalho foi semelhante ao comportamento dos ensaios experimentais, além disso, as precisões na determinação dos deslocamentos foram avaliadas em relação a carga no estado-limite último e estado-limite de serviço, nas quais, para os casos estudados, o modelo de análise não linear empregado neste trabalho se mostrou satisfatório na determinação dos deslocamentos em relação aos obtidos nos ensaios experimentais.

Palavras-chave: Concreto armado. Lajes nervuradas. Método dos elementos finitos. Análise não linear.

ABSTRACT

Due to the increasing use, the waffle slabs have been the object of several researches in the last years in order to improve the procedures of determination of the requests, as well as prediction of displacements. One of the ways that has been studied to improve the calculation procedures of this type of structure is the use of the finite element method. In addition, another way of improving accuracy in determining the behavior of structures in reinforced concrete is the inclusion of non-linearity of concrete and steel materials, as well as consideration of cracking of concrete. Therefore, this work aims to contribute to the structural analysis of waffle slabs using the finite element method using a nonlinear model. The analysis model used in this work was used in the ANSYS 16.1 software, in which the structures were discretized with the three-dimensional element SOLID65, applying constitutive models of the materials present in NBR 6118:2014, besides the Von Mises criterion for steel and Willam and Warnke's criterion for concrete. The model was used in two applications of waffle slabs, in which each consists of experimental tests present in the literature. The first application consisted of four of the slabs tested by Abdul-Wahab and Khalil (2000), which had dimensions of 150 x 150 cm and were subjected to a load centered on a 30 x 30 cm plate. And the second consisted of a waffle slab tested by Bastos (2016), which was subjected to a uniformly distributed load on the slab in small load increments. The results showed that the behavior of the slabs by the model adopted in this work was similar to the behavior of the experimental tests, in addition, the precisions in the determination of the displacements were evaluated in relation to the load in the ultimate limit state and service limit state, in which, for the studied cases, the nonlinear analysis model employed in this work was satisfactory in the determination of displacements in relation to those obtained in the experimental tests.

Keyword: Reinforced concrete. Waffle slabs. Finite element method. Non-linear analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Placas	21
Figura 2 – Comportamento de placa e de chapa de lajes	22
Figura 3 – Perspectiva de um pavimento de lajes maciças.....	24
Figura 4 – Perspectiva de um pavimento com lajes nervuradas	24
Figura 5 – Perspectiva de um pavimento com lajes mistas steel deck.....	25
Figura 6 – Perspectiva de um pavimento com lajes em grelha	25
Figura 7 – Perspectiva de um pavimento com laje-cogumelo	26
Figura 8 – Perspectiva de um pavimento com laje lisa	26
Figura 9 – Vão efetivo em lajes	29
Figura 10 – Concreto de envolvimento da armadura	34
Figura 11 – Corte transversal de uma laje nervurada normal	40
Figura 12 – Corte transversal de uma laje nervurada invertida	40
Figura 13 – Corte transversal de uma laje nervurada dupla.....	40
Figura 14 – Outros tipos de lajes nervuradas.....	41
Figura 15 – Elementos pré-fabricados estruturais para lajes	43
Figura 16 – Superfície de ruptura à punção	46
Figura 17 – Laje nervurada ortotrópica	51
Figura 18 – Transformação na laje maciça de espessura equivalente.....	53
Figura 19 – Faixas de lajes para a distribuição dos esforços	54
Figura 20 – Diagrama tensão-deformação idealizado pela NBR 6118:2014.....	59
Figura 21 – Diagrama tensão-deformação de tração segundo a NBR 6118:2014	60
Figura 22 – Diagrama tensão-deformação para o aço	61
Figura 23 – Superfície de ruptura do concreto simples no estado triaxial de tensões	61
Figura 24 – Geometria da laje ensaiada por Ajdukiewicz e Kliszczewicz.....	63
Figura 25 – Faixas de carregamento da última etapa dos ensaios	64
Figura 26 – Geometria da laje ensaiada por Droppa Jr.....	65
Figura 27 – Seções transversais da laje ensaiada por Droppa Jr.	65
Figura 28 – Detalhes das lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000).....	66
Figura 29 – Geometria da laje ensaiada por Klein e Selistre em 1997.....	67
Figura 30 – Vista em planta da laje (unidades em metros)	72

Figura 31 – Seção transversal da laje (unidades em centímetros).....	72
Figura 32 – Dimensões das nervuradas (cm).....	75
Figura 33 – Dimensões da laje nervurada (cm).....	75
Figura 34 – Elemento Solid65	77
Figura 35 – Orientação da armadura	77
Figura 36 – Tipos de discretização das armaduras.....	80
Figura 37 – Detalhes dos volumes criados para a inserção das taxas de aço.....	81
Figura 38 – Visualização das armaduras no ANSYS	81
Figura 39 – Solução do Newton-Raphson.....	82
Figura 40 – Características gerais das lajes ensaiadas	83
Figura 41 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje S1	84
Figura 42 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje S2	85
Figura 43 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje S3	85
Figura 44 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje S4	86
Figura 45 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje S1	87
Figura 46 – Seção transversal em centímetros da geometria da laje S1	87
Figura 47 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje S2	88
Figura 48 – Seção transversal em centímetros da geometria da laje S2	88
Figura 49 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje S3	89
Figura 50 – Seção transversal em centímetros da geometria da laje S3	89
Figura 51 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje S4	90
Figura 52 – Seção transversal centímetros da geometria em da laje S4	90
Figura 53 – Geometria modelada da laje S2.....	91
Figura 54 – Convergência da malha para a laje S2	92
Figura 55 – Condições de contorno das lajes.	92
Figura 56 – Exemplo de carga aplicada na laje.....	93
Figura 57 – Geometria em planta da laje ensaiada (cm).....	94
Figura 58 – Dimensões das nervuras (cm)	94
Figura 59 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje.....	95
Figura 60 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje de Bastos (2016).....	96
Figura 61 – Seção transversal em centímetros da laje de Bastos (2016)	96
Figura 62 – Geometria em elementos finitos da laje de bastos (2016)	97
Figura 63 – Convergência da malha para a laje de Bastos (2016).....	98
Figura 64 – Condições de contorno para a laje de Bastos (2016).....	98

Figura 65 – Carga aplicada na laje.....	99
Figura 66 – Deslocamentos da laje S1 para o último subpasso de carga	101
Figura 67 – Deslocamentos da laje S2 para o último subpasso de carga	101
Figura 68 – Deslocamentos da laje S3 para o último subpasso de carga	102
Figura 69 – Deslocamentos da laje S4 para o último subpasso de carga	102
Figura 70 – Deslocamentos em relação à carga aplicada para cada laje	103
Figura 71 – Posição dos deflectômetros na laje ensaída por Bastos (2016)	104
Figura 72 – Deslocamentos obtidos por Bastos (2016) no centro da laje	104
Figura 73 – Deslocamentos da laje para o último subpasso de carga	105
Figura 74 – Deslocamentos do centro da laje ao longo do carregamento	105
Figura 75 – Comparação de deslocamentos para a laje S1	106
Figura 76 – Comparação de deslocamentos para a laje S2.....	107
Figura 77 – Comparação de deslocamentos para a laje S3.....	107
Figura 78 – Comparação de deslocamentos para a laje S4.....	108
Figura 79 – Gráfico com a relação dos deslocamentos numéricos pelos experimentais	109
Figura 80 – Comparação de deslocamentos para a laje de Bastos (2016).....	110
Figura 81 – Comparação de deslocamentos numéricos, experimentais e calculados	111
Figura 82 – Gráfico com a relação dos deslocamentos dos modelos de cálculo pelos experimentais.....	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classes de agressividade ambiental	30
Tabela 2 – Cobrimento nominal de lajes para $\Delta c = 10$ mm.....	30
Tabela 3 – Abertura máxima das fissuras características (W_k)	33
Tabela 4 – Valores utilizando barras de alta aderência.....	35
Tabela 5 – Limites para deslocamentos	35
Tabela 6 – Características das lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil.....	66
Tabela 7 – Características das lajes ensaiadas por Silva Filho et al (2002)	69
Tabela 8 – Constantes do material <i>Concrete</i> no ANSYS	78
Tabela 9 – Características geométricas das lajes modeladas	83
Tabela 10 – Valores de tensão limite de tração de acordo com a resistência média do concreto	84
Tabela 11 – Pressões aplicada nas lajes	93
Tabela 12 – Deslocamentos experimentais no centro das lajes.....	100
Tabela 13 – Resultados numéricos e experimentais dos deslocamentos	108
Tabela 14 – Relação entre os deslocamentos numéricos e os experimentais	109
Tabela 15 – Resultados experimentais, numéricos e teóricos dos deslocamentos.....	111
Tabela 16 – Relação entre os deslocamentos com os modelos de cálculo e experimentais.....	112

LISTA DE SÍMBOLOS

l_{ef}	vão efetivo de lajes
l_o	vão livre entre os pilares
h	altura ou espessura da placa ou da laje
Δc	tolerância de execução quanto à cobrimentos
$C_{mín}$	cobrimento mínimo das armaduras
C_{nom}	cobrimento nominal
α	fator que correlaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta
y_t	distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada
I_c	momento de inércia da seção bruta do concreto
$f_{ctk,inf}$	resistência característica inferior do concreto à tração
$f_{ct,m}$	resistência média do concreto à tração
f_{cm}	resistência média do concreto à compressão
f_{ck}	resistência característica do concreto à compressão
A_{cr}	área da região de envolvimento protegida pela barra
w_k	valor característico da abertura de fissuras
Φ_i	diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada
ρ_{ri}	taxa de armadura passivem relação à A_{cr}
σ_{si}	tensão de tração no centro de gravidade da armadura
$\Phi_{máx}$	diâmetro máximo das armaduras
$S_{máx}$	espaçamento máximo das armaduras
M_a	momento fletor na seção crítica do vão considerado
I_{II}	momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II
p'	a taxa de armadura comprimida
ξ	coeficiente em função do tempo
∂	derivada parcial
m_x, m_y	momentos fletores
m_{xy}, m_{yx}	momentos torçores
ν	coeficiente de Poisson
E	módulo de deformação longitudinal do material
w	flecha da placa em um dado ponto

D	rigidez à flexão da placa
∇	operador laplaciano
B _x	rigidez à flexão das nervuras paralelas ao eixo x;
B _y	rigidez à flexão das nervuras paralelas ao eixo y;
b _x b _y	espaçamentos axiais das nervuras, paralelos aos eixos x e y
C _x	é a rigidez à torção das nervuras paralelas ao eixo x;
C _y	rigidez à torção das nervuras paralelas ao eixo y.
w (x,y)	deslocamentos transversais do plano médio da laje
N _x ,N _y , N _{xy}	esforços de membrana
U	energia de deformação
x	coordenada global x
y	coordenada global y
z	coordenada global z
m e n	número de retângulos em que se divide a laje
E _{cs}	módulo de elasticidade secante
D ₁	rigidez da nervura
D ₂	rigidez da mesa
D _e	rigidez equivalente
h _e	altura equivalente
b _f	largura colaborante em seções "T"
a ₁	distância entre eixos de nervuras
b _w	largura da nervura
f _e	faixa externa
f _i	faixa interna
h	altura ou espessura da placa ou laje
h _{eq}	altura ou espessura equivalente da placa ou laje
σ_c	tensão do concreto
ϵ_{c2}	deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico
ϵ_{cu}	deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura
E _{c1}	módulo secante da origem até o pico da tensão de compressão
k	número de plasticidade
ϵ_{ct}	deformação de tração
σ_{ct}	tensão de tração no concreto

F	a função do estado de tensões principais;
S	é a superfície de ruptura
f_t	é a tensão limite à tração
f_c	é a tensão limite uniaxial à compressão
f_{cb}	é a tensão limite biaxial à compressão
σ_n^a	representa o estado de tensões hidrostático
f_1	tensão limite biaxial à compressão no estado de tensões hidrostático
f_2	tensão limite uniaxial à compressão no estado de tensões hidrostático
UZ	deslocamento na direção z, no ansys
UY	deslocamento na direção y, no ansys
UX	deslocamento na direção x, no ansys
ψ_2	fator de redução de combinação quase permanente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Área e limitação do tema	18
1.2	Justificativa.....	18
1.3	Objetivo	19
1.3.1	Objetivo geral.....	19
1.3.2	Objetivos específicos.....	19
1.4	Estrutura do trabalho	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	Lajes de concreto armado	21
2.1.1	Histórico	22
2.1.2	Classificação.....	23
2.1.3	Ações nas lajes de edifícios	27
2.1.4	Recomendações normativas para lajes de concreto armado	28
2.1.4.1	Vão efetivo	29
2.1.4.2	Classe de agressividade ambiental	29
2.1.4.3	Cobrimentos	30
2.1.4.5	Estados-limites últimos	31
2.1.4.6	Estados-limites de serviço	32
2.1.4.6.1	Limites em relação as fissuras	33
2.1.4.6.2	Deslocamentos-limites	35
2.2	Lajes nervuradas	37
2.2.1	Definição	38
2.2.2	Vantagens e desvantagens.....	38
2.2.3	Lajes moldadas no local	39
2.2.4	Lajes com nervuras pré-moldadas	41
2.2.5	Elementos de enchimento	43
2.2.6	Recomendações normativas	44
2.2.7	Punção em lajes	45
2.2.8	Métodos de cálculo	46
2.2.8.1	Teoria das placas	47

2.2.8.1.1	Teoria clássica das placas delgadas	47
2.2.8.1.2	Teoria de placas para lajes nervuradas.....	49
2.2.8.1.3	Cálculo como laje maciça com espessura equivalente	50
2.2.8.2	Analogia de grelha	53
2.2.8.3	Método dos pórticos equivalentes.....	54
2.3	Método dos elementos finitos	55
2.3.1	Definição	55
2.3.2	Formulação	56
2.3.3	Elementos	57
2.3.4	Tipos de análise.....	57
2.3.4.1	Análise linear	57
2.3.4.2	Análise não linear.....	58
2.3.5	Pós-processamento	59
2.4	Modelos constitutivos da NBR 6118:2014.....	59
2.5	Teoria de Willam e Warnke	61
2.6	Pesquisas.....	63
3	METODOLOGIA	76
3.1	Modelo de cálculo em elementos finitos	76
3.1.1	Características constitutivas	76
3.1.1.1	Concreto.....	78
3.1.1.2	Aço.....	79
3.1.2	Considerações referentes as análises não lineares.....	82
3.2	Aplicação 01 – Lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000)	83
3.2.1	Geometria em elementos finitos	91
3.2.2	Escolha da malha em elementos finitos.....	91
3.2.3	Condições de contorno.....	92
3.2.4	Cargas aplicadas nas lajes	93
3.3	Aplicação 02 – Laje nervurada ensaiada por Bastos (2016).....	94
3.3.1	Geometria em elementos finitos	97
3.3.2	Escolha da malha em elementos finitos.....	97
3.3.3	Condições de contorno.....	98
3.3.4	Cargas aplicadas na laje	99

4	RESULTADOS	100
4.1	Aplicação 01	100
4.1.1	Resultados experimentais da aplicação 01	100
4.1.2	Resultados numéricos para a aplicação 01	101
4.2	Aplicação 02	103
4.2.1	Resultados experimentais da aplicação 02	103
4.2.2	Resultados numéricos da aplicação 02	104
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	106
5.1	Aplicação 01	106
5.2	Aplicação 02	110
6	CONCLUSÕES	113
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	115
	APÊNDICES	
	APÊNDICE A – Deslocamentos obtidos para a laje S1 de Abdul-Wahab e Khalil (2000)	120
	APÊNDICE B – Deslocamentos obtidos para a laje S2 de Abdul-Wahab Khalil (2000)	121
	APÊNDICE C – Deslocamentos obtidos para a laje S3 de Abdul-Wahab e Khalil (2000)	123
	APÊNDICE D – Deslocamentos obtidos para a laje S4 de Abdul-Wahab e Khalil (2000)	124
	APÊNDICE E – Deslocamentos obtidos e momentos teóricos para a laje de Bastos (2016)	125
	ANEXOS	
	ANEXO A – Deslocamentos experimentais para as lajes de Abdul-Wahab e Khalil (2000)	127
	ANEXO B – Resultados teóricos e experimentais obtidos por Bastos (2016)	128

1 INTRODUÇÃO

É notório o crescente uso de vão maiores e muitas vezes sem vigas na concepção arquitetônica de edifícios, dando maior liberdade do espaço interno ao usuário. Diante disso, a solução adotada muitas vezes nesses casos é o uso de lajes nervuradas, fazendo desse um dos sistemas estruturais mais utilizados atualmente.

Além desse sistema estrutural permitir grandes vãos, o que diminui o número de pilares, ele apresenta a vantagem de possuir maior versatilidade no seu uso em relação ao sistema convencional de lajes maciças.

Contudo, ainda são empregados métodos simplificados na análise desse tipo de laje, os quais muitas vezes não apresentam a precisão necessária, gerando elementos estruturais superdimensionados ou subdimensionados, o que os tornam, respectivamente, economicamente inviáveis ou sujeitos à ruptura inesperada.

Nesses casos, onde os métodos clássicos não apresentam precisão, deve-se analisar as estruturas por métodos mais sofisticados, tais como: o método das diferenças finitas, o método dos elementos de contorno ou o método dos elementos finitos. Dentre destes, o que vem mais sendo pesquisado e aplicado é o método dos elementos finitos, pois o mesmo apresenta maior facilidade na implementação computacional que os outros dois.

1.1 Área e limitação do tema

O presente trabalho foi realizado na área de estruturas, com enfoque na análise numérica não linear de lajes nervuradas de concreto armado pelo método dos elementos finitos, de forma a contribuir para a análise dessas estruturas.

1.2 Justificativa

Devido ao crescente uso, as lajes nervuradas tem sido alvo de diversas pesquisas nos últimos anos de forma a melhorar os procedimentos de determinação das solicitações, bem como de previsão de deslocamentos.

Contudo, os modelos simplificados permitidos atualmente pela NBR 6118:2014 para a análise desse tipo de estrutura apresenta limitações em relação à disposição dos pilares. Além disso, cresce a necessidade de estudar o comportamento desse tipo

de estrutura, em especial quanto aos estados-limites de serviço, assim como quando sujeitas às cargas concentradas.

Diante disso, os métodos aproximados destacam-se pela possibilidade de se analisar estruturas de qualquer geometria, carregamento e/ou condição de apoio. Dentro desses, o método dos elementos finitos destaca-se pela sua facilidade na implementação computacional.

Além disso, uma das formas de melhorar a precisão na determinação do comportamento de estruturas em concreto armado é a inclusão da não linearidade dos materiais concreto e aço, bem como a consideração da fissuração do concreto.

Diante do exposto, o presente trabalho tem por finalidade contribuir para a análise não linear de lajes nervuradas de concreto armado através do método dos elementos finitos.

1.3 Objetivo

A seguir é apresentado o objetivo geral, assim como os objetivos específicos.

1.3.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo geral contribuir para análise estrutural de lajes nervuradas de concreto armado através do método dos elementos finitos utilizando um modelo não linear, comparando os resultados obtidos com resultados experimentais de outras pesquisas.

1.3.2 Objetivos específicos

Este trabalho tem os seguintes objetivos específicos:

- Revisar bibliograficamente os conceitos sobre lajes em geral, e em especial as lajes nervuradas;
- Revisar os métodos de cálculos para a análise estrutural de lajes nervuradas;
- Estudar e analisar os fundamentos do método dos elementos finitos para a análise de estruturas;

- Pesquisar sobre análises experimentais realizadas em outras pesquisas de lajes nervuradas;
- Modelar e analisar lajes nervuradas de concreto armado através de modelos não lineares com a utilização do *software* ANSYS;
- Comparar e analisar os deslocamentos de modelos não lineares através da análise numérica de lajes nervuradas de experimentos presentes na literatura em relação ao estado-limite último e estado-limite de serviço.

1.4 Estrutura do trabalho

No capítulo 1 é apresentado uma introdução sobre este trabalho, a justificativa, são definidos os objetivos gerais e específicos, bem como apresentado a estrutura do trabalho.

No capítulo 2 é feita a revisão bibliográfica sobre o assunto. Nela são abordados tópicos introdutórios de lajes, dando ênfase posteriormente às lajes nervuradas. Neste capítulo também são abordados tópicos sobre o método dos elementos finitos, modelos constitutivos dos materiais presentes na NBR 6118:2014, além de tópicos acerca do critério de ruptura de Willam e Warnke. Ademais, no final desse capítulo, é apresentado as pesquisas realizadas em relação à flexão de lajes nervuradas.

O capítulo 3 aborda a metodologia adotada neste trabalho. São detalhados os modelos de cálculo utilizados, as geometrias das estruturas, condições de contorno, carregamentos, bem como os critérios para a escolha das malhas de elementos finitos.

No capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos pelo autor, bem como os resultados experimentais dos autores dos trabalhos utilizados para as comparações.

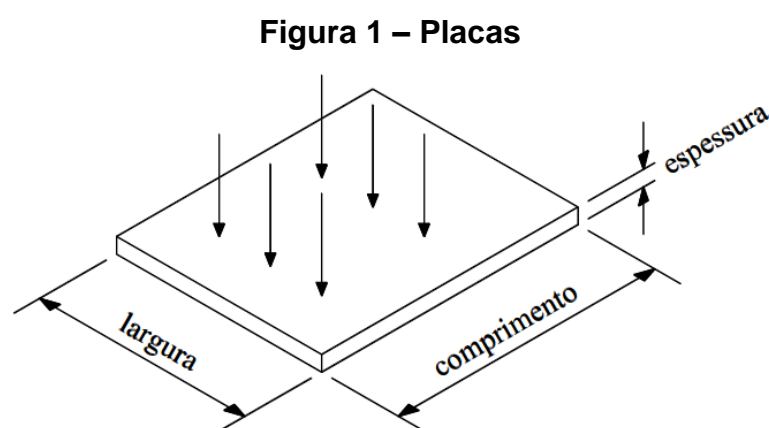
No capítulo 5 é feita a análise dos resultados, comparando os resultados experimentais com os numéricos, de forma a analisar a precisão dos modelos não lineares na previsão dos deslocamentos no estado-limite último e estado-limite de serviço.

O capítulo 6 apresenta as conclusões finais do autor quanto ao modelo numérico testado, bem como sugestões de trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Lajes de concreto armado

De acordo com o item 14.4.2.1 da NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto - Procedimento, lajes são placas de concreto sujeitas normalmente a ações normais ao seu plano. Além disso, as placas limitam dois planos por uma espessura h que é pequena em relação as outras duas dimensões, conforme mostra a figura 1.



Fonte: Silva (2005).

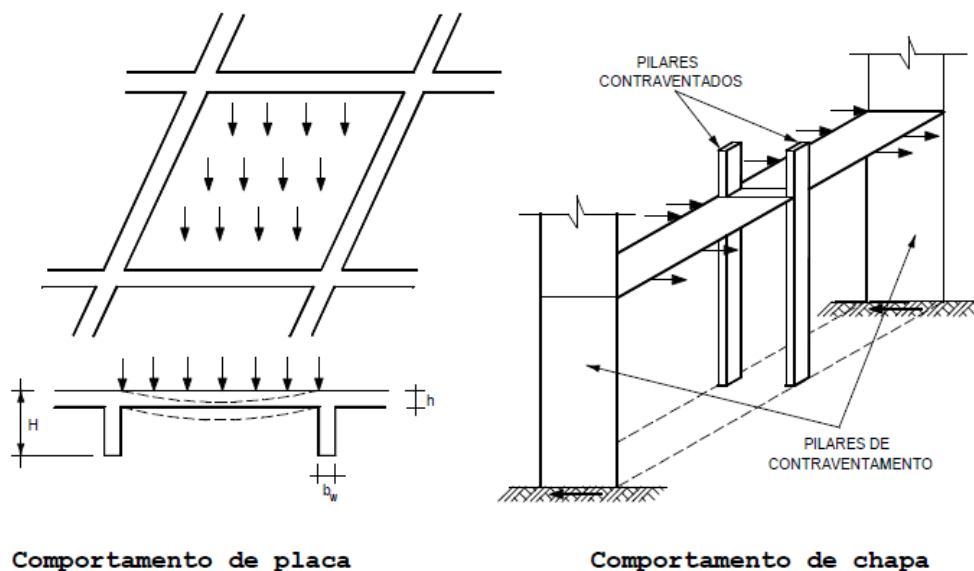
As lajes são elementos bidirecionais planos cuja espessura é bem inferior as outras duas dimensões que predominantemente são solicitadas por cargas perpendiculares ao seu plano médio e que tem por função receber e transmitir as cargas de uso. Além disso, as lajes também ajudam na distribuição das ações horizontais entre os elementos de contraventamento e funcionam como mesas de compressão em vigas “T” (Araújo, 2014).

Já para Guerrin e Lavaur (2002), as lajes são áreas planas limitando os andares e suportando os revestimentos de pisos e que tem como função suportar o peso próprio e as sobrecargas de utilização, assim como isolar térmica e acusticamente os diversos andares.

Franca e Fusco (1997) destacam que as lajes além de funcionarem como placas distribuindo as cargas verticais aplicadas nos pisos, também funcionam como chapas ao constituírem diafragmas rígidos distribuindo as cargas horizontais atuantes nos diferentes pilares, conforme mostra a figura 2. Essa última característica segundo os autores é ainda mais importante em edifícios altos pois elas garantem a estabilidade

global da estrutura por permitirem os pilares contraventados se apoiarem nos pilares de contraventamento.

Figura 2 – Comportamento de placa e de chapa de lajes



Fonte: Franca e Fusco (1997).

2.1.1 Histórico

Conforme Carvalho e Pinheiro (2013), durante muito tempo as estruturas foram executadas em madeira e pedra, em que os assoalhos recebiam as cargas, as quais eram levadas às vigas transversais, destas às vigas mestras e daí aos pilares. Tal concepção continuou a ser usada mesmo após o aparecimento do concreto armado.

O concreto armado só foi utilizado em lajes em 1854 quando William Boutland Wilkinson patenteou um sistema de lajes que consistia em concreto reforçado com barras de ferro e arame, e o utilizou na construção dos pisos e do telhado numa casa de campo. Além disso, ele também patenteou e usou outro sistema de pisos, o qual a fôrma era constituída de blocos de gesso ocios moldando uma série de nervuras, podendo então ser considerada a primeira laje nervurada da história (VASCONCELLOS, 2004).

Em 1906, foi construído o edifício C. A. Bovey Building, em Minneapolis, Minnesota, o qual foi o primeiro edifício construído com o uso de lajes sem vigas, sendo idealizado pelo engenheiro C. A. P. Turner. A proliferação desse sistema se deu após a construção na Rússia em 1908 de um edifício de quatro pavimentos

projetado pelo engenheiro A. F. Loley e do edifício construído por Maillart em 1910 em Zurique (CARVALHO e PINHEIRO, 2013).

No Brasil, conforme Vasconcellos (1985) apud Nappi (1993) a utilização de lajes de concreto armado aconteceu ao final da década de 20, além disso, por volta de 1935 já seriam utilizadas pela primeira vez lajes pré-fabricadas, as quais eram constituídas de vigotas de concreto armado com blocos cerâmicos apoiados sobre aquelas, com um capeamento de concreto e armadura.

2.1.2 Classificação

Segundo Souza e Cunha (1998) as lajes podem classificadas quanto à forma, à natureza, ao tipo de apoio e quanto ao tipo de armação. Os diferentes tipos de classificações para lajes são apresentados a seguir.

2.1.2.1 Quanto à forma

Segundo Guerrin e Lavour (2002) as lajes podem ter diferentes formas. Sendo estas e suas características apresentadas abaixo:

- a) lajes retangulares: são as mais comuns em edificações;
- b) lajes quadradas: segundo os autores são as mais econômicas;
- c) lajes elípticas: são raramente utilizadas e seu cálculo é fácil;
- d) lajes circulares: não são usuais, contudo são encontradas em algumas obras;
- e) lajes triangulares: o uso desse tipo de laje em edificações é raro;
- f) lajes trapezoidais: poucas vezes utilizadas;
- g) lajes de outras formas qualquer: corriqueiras, usualmente calcula-se através de analogia com outras lajes mais simples.

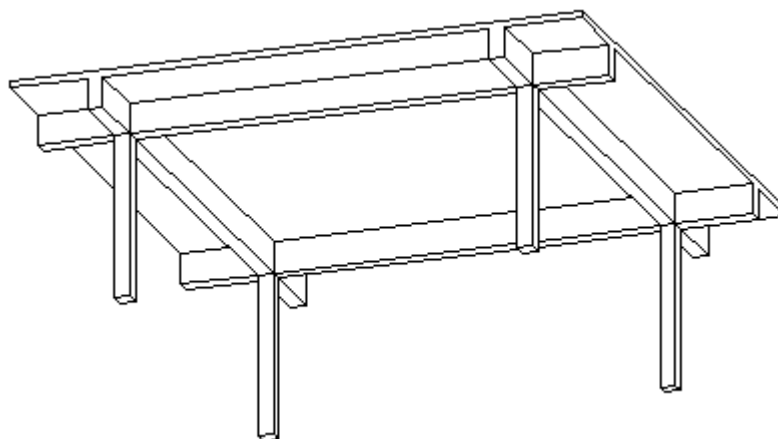
2.1.2.2 Quanto à natureza

Devido às técnicas de execução e materiais utilizados nas lajes, elas podem ser classificadas quanto à sua natureza em:

- a) lajes maciças: são lajes com espessura uniforme e apoiadas no seu contorno, podendo ser estas de alvenaria ou serem vigas, conforme mostra a figura 3.

São usadas predominantemente em edificações residenciais em vãos pequenos (ARAÚJO, 2014);

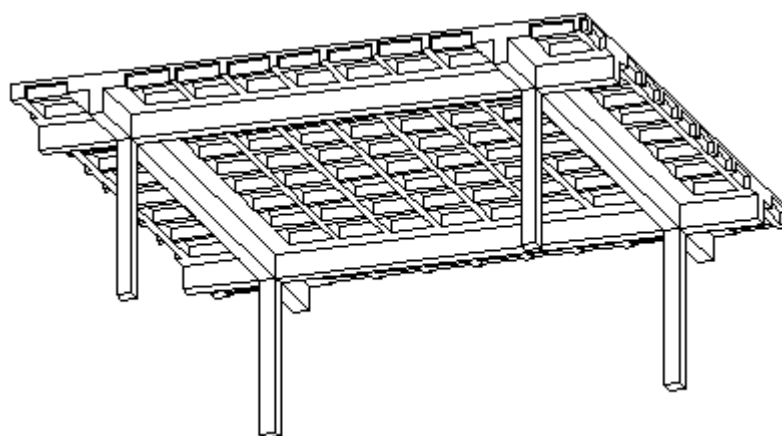
Figura 3 – Perspectiva de um pavimento de lajes maciças



Fonte: Elaborado pelo autor.

b) lajes nervuradas: Souza e Cunha (1998) caracterizam essas lajes por um conjunto de nervuras, onde estão localizadas as barras de tração. Apresentam um peso próprio menor em relação as lajes maciças por apresentarem menos concreto na zona tracionada. Além disso, o espaço entre as nervuras podem ser preenchidos por algum material inerte com baixo peso específico. A figura 4 apresenta a perspectiva de um pavimento com lajes nervuradas;

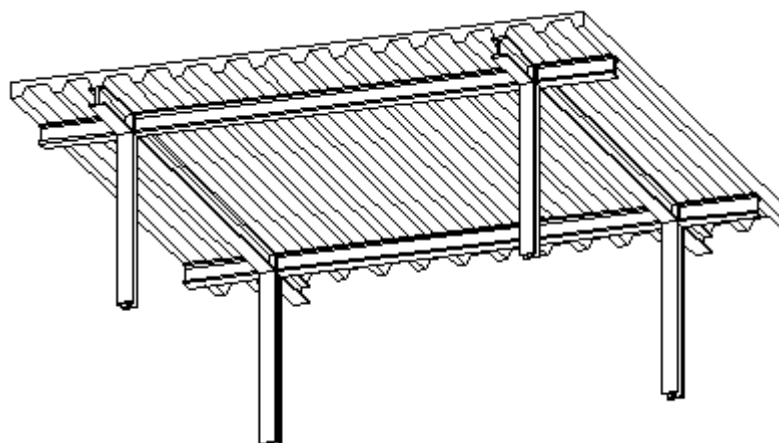
Figura 4 – Perspectiva de um pavimento com lajes nervuradas



Fonte: Elaborado pelo autor.

- c) lajes mistas: são lajes semelhantes as lajes nervuradas, contudo apresenta outros materiais, os quais contribuem para a resistência à flexão. A figura 5 ilustra esse tipo de laje;

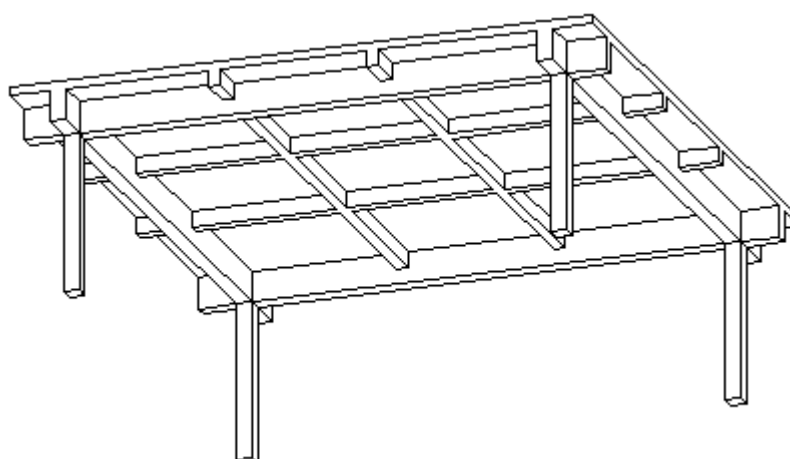
Figura 5 – Perspectiva de um pavimento com lajes mistas steel deck



Fonte: Elaborado pelo autor.

- d) lajes em grelhas: segundo Souza e Cunha (1998) é um caso particular de lajes nervuradas, onde o espaçamento entre as nervuras é superior a um metro. Geralmente as vigas são aparentes, onde o cálculo é realizado como laje maciça e o vigaamento é calculado como grelha;

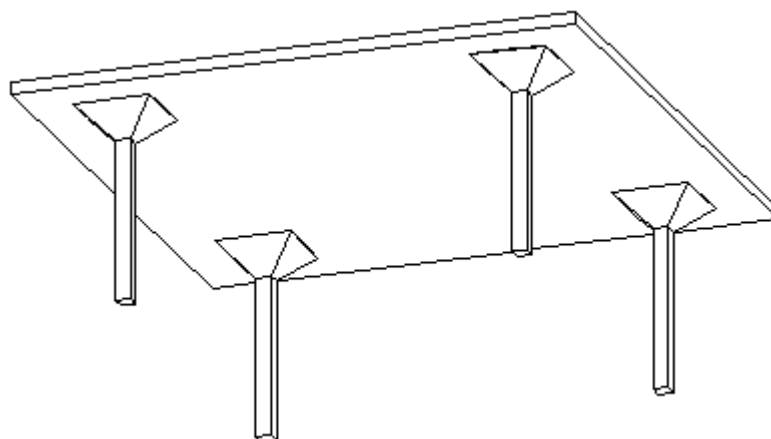
Figura 6 – Perspectiva de um pavimento com lajes em grelha



Fonte: Elaborado pelo autor.

- e) lajes-cogumelo: são lajes apoiadas diretamente nos pilares e nesses apresenta um aumento de seção no topo chamado de capitel, conforme mostra a figura 7 (ARAÚJO, 2014);

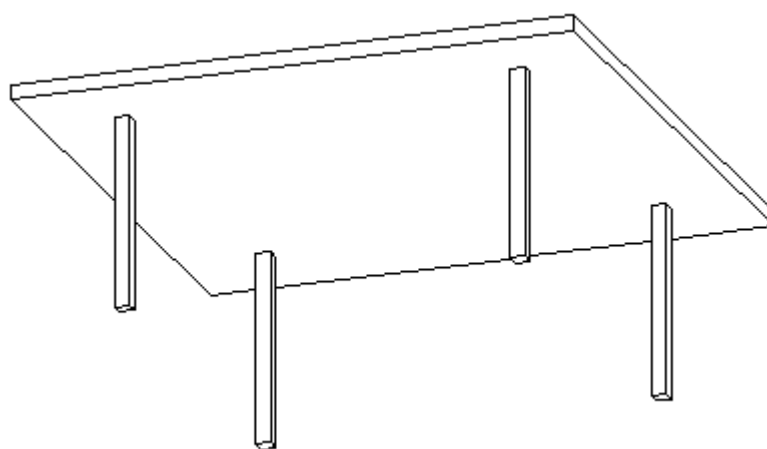
Figura 7 – Perspectiva de um pavimento com laje-cogumelo



Fonte: Elaborado pelo autor.

- f) lajes lisas: são lajes apoiadas diretamente em pilares (figura 8), contudo, não apresentam aumento de seção nos pilares como nas lajes-cogumelo.

Figura 8 – Perspectiva de um pavimento com laje lisa



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.2.3 Quanto ao tipo de apoio

Conforme Cunha e Souza (1998) as lajes podem ser classificadas em relação ao tipo de apoio nas seguintes categorias.

- a) apoio contínuo: ocorre quando a laje se apoia sobre alvenarias ou sobre vigas, podendo estas serem de concreto armado ou protendido, assim como aço ou madeira;

- b) apoio discreto: ocorre quando a laje está diretamente apoiada sobre pilares, são chamadas lajes-cogumelo ou lajes planas quando não há capitel. Além disso, pode ter o capitel aparente, invertido ou não apresenta-lo;
- c) apoio sobre o solo: ocorre quando a laje possui algum trecho apoiado sobre o solo, como os radiers e pistas de rodovias de aeroportos.

2.1.2.4 Quanto ao tipo de armação

Segundo Leonhardt e Mönning (1977), Araújo (2014) e Carvalho e Figueiredo Filho (2014) quando uma laje retangular é submetida a um carregamento uniformemente distribuído o momento fletor resultante é maior na direção do menor vão, dessa forma, quando um vão é muito maior que o outro, o momento naquele é relativamente pequeno.

Logo, conforme a relação entre os vãos classifica-se as lajes retangulares em lajes armadas em cruz ou armada em uma direção.

- a) lajes armadas em cruz: são aquelas onde a relação entre o maior e o menor vão não é superior a 2. Então, deve-se dimensionar e dispor armaduras nas duas direções.
- b) lajes armadas em uma direção: são aquelas onde a relação entre o maior e o menor vão é superior a 2, portanto, o momento fletor na direção do maior vão pode ser desconsiderado e adota-se para esse vão uma armadura de distribuição.

Contudo, Araújo (2014, v. 2) ressalta que essa classificação de lajes leva em consideração que as mesmas estejam apoiadas em apoios rígidos ou quase rígidos.

2.1.3 Ações nas lajes de edifícios

De acordo com a NBR 8681:2003 – Ações e segurança nas estruturas - Procedimento, as ações são as “causas que provocam esforços ou deformações nas estruturas. Do ponto de vista prático, as forças e as deformações impostas pelas ações são consideradas como se fossem as próprias ações. As deformações impostas são por vezes designadas por ações indiretas e as forças, por ações diretas”. Além disso, elas podem ser classificadas em ações permanentes, variáveis e excepcionais.

A NBR 8681:2003 esclarece que as ações permanentes são aquelas que durante a vida útil da construção permanecem praticamente constantes e podem ser divididas em diretas ou indiretas.

- a) ações permanentes diretas: os pesos próprios dos elementos construtivos permanentes, dos elementos estruturais, dos equipamentos fixos, dos empuxos de terras não removíveis e outras ações constantes;
- b) ações permanente indiretas: protensão, recalques de apoio e retração dos materiais;

As ações variáveis são conceituadas pela NBR 8681:2003 como as cargas acidentais das construções, assim como forças de frenação, de impacto e centrífugas, os efeitos de vento, do atrito nos aparelhos de apoio, das variações de temperatura e das pressões hidrostáticas e hidrodinâmicas. São classificadas em normais ou especiais, sendo que a primeira tem grande probabilidade de ocorrência enquanto a segunda deve ser considerada em situações especiais.

As ações excepcionais são aquelas com baixa probabilidade de ocorrência durante a vida útil da construção e de curta duração. Considera-se que as ações excepcionais são decorrentes de causas tais como explosões, choques de veículos, incêndios, enchentes ou sismos excepcionais. A NBR 8681 permite que os incêndios possam ser desconsiderados como ações desde que seja levado em conta os efeitos dos mesmos através da redução da resistência dos materiais constitutivos da estrutura.

Conforme a NBR 6118:2014, a combinação das ações com probabilidades de ocorrerem simultaneamente sobre a estrutura é definida como um carregamento. Além disso, o carregamento deve ser feito de modo que os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura sejam determinados.

2.1.4 Recomendações normativas para lajes de concreto armado

A seguir serão apresentadas algumas prescrições normativas presentes na atual norma brasileira de projeto de estruturas de concreto armado, a NBR 6118:2014.

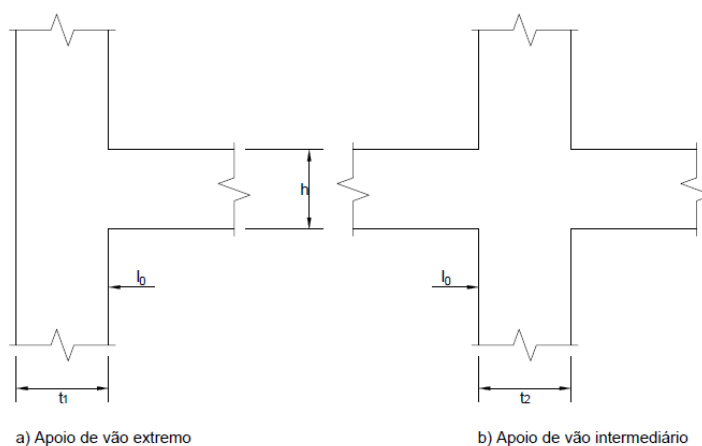
2.1.4.1 Vão efetivo

Segundo a NBR 6118:2014, quando os apoios puderem ser considerados suficientemente rígidos quanto a translação vertical os vãos efetivos de placas e lajes devem ser calculados pela expressão abaixo.

$$l_{ef} = l_0 + a_1 + a_2 \quad (1)$$

Sendo a_1 igual ao menor valor entre $t_1/2$ e $0,3h$, assim como a_2 igual ao menor valor $t_2/2$ e $0,3h$, conforme a figura 9.

Figura 9 – Vão efetivo em lajes



Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

Contudo, nos casos correntes dos edifícios, usualmente adota-se a distância entre os centros dos apoios como vãos efetivos (ARAÚJO, 2014).

2.1.4.2 Classe de agressividade ambiental

De acordo com a NBR 6118:2014, a agressividade do meio ambiente sobre as estruturas de concreto está diretamente ligada às ações físicas e químicas, e independe das ações previstas no dimensionamento.

Diante do exposto, a NBR 6118:2014 estabelece que a classe de agressividade ambiental (CAA) deve ser definida conforme a tabela 1, podendo ser avaliada conforme as condições de exposição da estrutura ou de suas partes. Ademais, o projetista estrutural pode considerar uma classificação mais agressiva que a presente na tabela 1.

Tabela 1 – Classes de agressividade ambiental

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana ^{a,b}	Pequeno
III	Forte	Marinha ^a	Grande
		Industrial ^{a,b}	
IV	Muito Forte	Industrial ^{a,c}	Elevado
		Respingos de maré	

^a Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).

^b Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.

^c Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

2.1.4.3 Cobrimentos

De forma a dificultar o ingresso de agentes agressivos ao interior do concreto, a NBR 6118:2014 define cobrimentos mínimos das armaduras (c_{\min}), sendo que a execução e projeto devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), o qual é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc), adotado usualmente $\Delta c = 10$ mm para obras correntes podendo ser adotado $\Delta c = 5$ mm quando houver um controle adequado de qualidade e limites rígidos de tolerância da variabilidade das medidas durante a execução. Os valores de cobrimento nominais para lajes de acordo com a CAA são mostrados na tabela 2.

Tabela 2 – Cobrimento nominal de lajes para $\Delta c = 10$ mm

Tipo de estrutura	Classe de agressividade ambiental			
	I	II	III	IV
	Cobrimento nominal (mm)			
Laje de concreto armado	20	25	35	45

Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

Além disso, conforme a NBR 6118:2014, na face superior de lajes que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos e outros, as exigências da tabela podem ser substituídas pelos seguintes limites:

- a) $c_{nom} \geq \Phi$ barra
- b) $c_{nom} \geq \Phi$ feixe = $\Phi_n \sqrt{n}$
- c) $c_{nom} \geq 0,5 \Phi$ bainha

Toda via, segundo a norma deve-se respeitar sempre o cobrimento nominal ≥ 15 mm.

2.1.4.5 Estados-limites últimos

A NBR 6118:2014 conceitua os estados-limites últimos (ELU) como aqueles que determinam a paralisação do uso da estrutura, tais como o colapso ou outra forma de ruína estrutural.

Dessa forma, segundo a NBR 6118:2014 deve-se garantir uma probabilidade pequena de ruína do elemento estrutural, bem como garantir que uma eventual ruptura ocorra de forma suficientemente avisada, alertando os usuários.

Conforme Araújo (2014), em estruturas de concreto armado deve-se verificar a segurança dos seguintes estados-limites últimos:

- a) ruptura ou deformação plástica excessiva dos materiais;
- b) instabilidade de equilíbrio, considerando os efeitos de segunda ordem;
- c) perda de equilíbrio da estrutura, admitida como m corpo rígido;
- d) estado-limite último provocado por solicitações dinâmicas;
- e) transformação da estrutura, no todo ou em parte, em um sistema hipostático.

Além disso, conforme a NBR 6118:2014, na análise dos esforços resistentes são considerados que as seções transversais se mantem planas após a deformação, que as tensões de tração no concreto são desprezadas e que a deformação das barras e o concreto em seu entorno é a mesma.

2.1.4.6 Estados-limites de serviço

Os estados-limites de serviço (ELS) são conceituados pela NBR 6118:2014 como aqueles que provem aos usuários o conforto, assim como durabilidade, aparência e boa utilização aos usuários ou aos equipamentos aos quais são suportados pela estrutura.

Para estruturas de concreto armado, de acordo com a NBR 6118:2014, deve-se verificar os seguintes ELS:

- a) estado-limite de formação de fissura (ELS-F): estado em que inicia-se a formação de fissuras, o qual é considerado quando a tensão de tração máxima na seção transversal for igual $f_{ct,f}$;
- b) estado-limite de abertura das fissuras (ELS-W): estado em que as fissuras atingem as aberturas máximas especificadas;
- c) estado-limite de deformações excessivas (ELS-DEF): estado em que as deformações atingem aos limites impostos para a utilização;
- d) estado-limite de vibrações excessivas (ELS-VE): estados em que as vibrações atingem aos limites impostos para a utilização.

Segundo Leonhardt e Mönning (1979), a determinação dos limites de serviço era realizada antigamente considerando toda a carga permanente e 70% da carga acidental, contudo, o autor destaca que em relação aos estados-limites de serviço o bom desempenho da estrutura deve-se a toda a carga permanente e a parcela da carga acidental que atua por um longo período ou com frequência, a qual é muito aquém de 70%.

Atualmente no Brasil, utiliza-se 30% ou 40% da carga acidental em edifícios residenciais para a verificação dos estados-limites de serviço de acordo com a NBR 8681:2003 e a NBR 6118:2014.

Nos estados-limites de serviços as estruturas trabalham em parte no estágio I e em parte no estágio II, onde a separação entre esses dois comportamentos é delimitado pelo momento de fissuração (M_r), o qual pode ser calculado pela equação 2, conforme a NBR 6118:2014.

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{\gamma_t} \quad (2)$$

sendo

$$\alpha = 1,2 \text{ para seções T ou duplo T;}$$

$\alpha = 1,3$ para seções I ou T invertido;

$\alpha = 1,5$ para seções retangulares;

onde

α – é o fator que correlaciona de forma aproximada a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta;

y_t – é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

I_c – é o momento de inércia da seção bruta do concreto;

f_{ct} – é a resistência do concreto à tração direta, sendo que deve ser usado no estado-limite de formação de fissuras o $f_{ctk,inf}$, conforme a expressão 3, e no estado-limite de deformação excessiva o $f_{ct,m}$, conforme a expressão 4 para concreto de classes até C50 e pela equação 5 para concreto de classes C55 até C90.

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ct,m} \quad (3)$$

$$f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (4)$$

$$f_{ct,m} = 2,12 \ln(1 + 0,11 f_{ck}) \quad (5)$$

Onde o f_{ck} , assim como o $f_{ct,m}$ e o $f_{ctk,inf}$ são expressões em megapascal (Mpa).

2.1.4.6.1 Limites em relação as fissuras

Segundo a NBR 6118:2014, a fissuração em elementos estruturais de concreto armado é inevitável, pois o concreto apresenta grande variabilidade e baixa resistência à tração. Contudo de forma a proteger as armaduras quanto a corrosão, assim como a aceitabilidade sensorial dos usuários a norma estabelece os seguintes limites para as lajes de concreto armado:

Tabela 3 – Abertura máxima das fissuras características (W_k)

Classe de agressividade ambiental (CAA)	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar
CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,4$ mm	Combinação frequente
CAA II e CAA II	ELS-W $w_k \leq 0,3$ mm	
CAA IV	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	

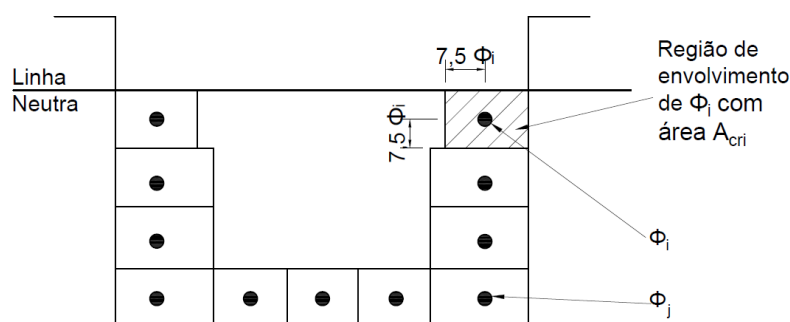
Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

Contudo, a NBR 6118:2014 destaca que os valores de aberturas de fissuras são difíceis de estimar de forma precisa pois sofre influência de restrições às variações

volumétricas das estruturas, bem como das condições de execução. Logo, os critérios existentes na norma brasileira não garantem a avaliação precisa da abertura de uma fissura específica.

Além disso, conforme a NBR 6118:2014, para cada elemento ou grupo de elementos da armadura que controla a fissuração, deve ser considerada uma área da região de envolvimento protegida pela barra (A_{cr}), constituída por um retângulo cujos lados não distem mais de $7,5 \Phi$ do eixo da barra da armadura, conforme mostra a figura 10.

Figura 10 – Concreto de envolvimento da armadura



Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

De acordo com a NBR 6118:2014, o valor característico da abertura de fissuras (w_k), para cada parte da região de envolvimento, é o menor entre os obtidos pelas equações 6 e 7.

$$w_k = \frac{\Phi_i}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \frac{3\sigma_{si}}{f_{ctm}} \quad (6)$$

$$w_k = \frac{\Phi_i}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left(\frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) \quad (7)$$

onde

σ_{si} , Φ_i , E_{si} , ρ_{ri} – são definidos pra cada área de envolvimento em exame;

A_{cr} – é a região de envolvimento protegida pela barra Φ_i ;

Φ_i – é o diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada;

ρ_{ri} – é a taxa de armadura passivem relação à A_{cr} ;

σ_{si} – é a tensão de tração no centro de gravidade da armadura considerada, calculada no estágio II.

Ademais, a NBR 6118:2014 permite não realizar a verificação mostrada anteriormente desde que o elemento estrutural respeite as exigências de cobrimento e de armadura mínima imposta pela norma, bem como os limites apresentado na

tabela 4 quanto ao diâmetro máximo ($\Phi_{\text{máx}}$) e ao espaçamento máximo das armaduras ($S_{\text{máx}}$).

Tabela 4 – Valores utilizando barras de alta aderência

Tensão na barra σ_{si} (Mpa)	Valores máximos	
	$\Phi_{\text{máx}}$ (mm)	$S_{\text{máx}}$ (cm)
160	32	30
200	25	25
240	20	20
280	16	15
320	12,5	10
360	10	5
400	8	-

Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

2.1.4.6.2 Deslocamentos-limites

A NBR 6118:2014 define deslocamento-limites, os quais segundo a mesma são valores práticos para a verificação em serviço do estado-limite de deformações excessivas da estrutura, conforme mostra a tabela 5.

Tabela 5 – Limites para deslocamentos

Tipos de efeito	Razão da limitação	Deslocamento a considerar	Deslocamento-limite
Aceitabilidade sensorial	Visual	Total	$l/250$
	Outro	Devido a cargas acidentais	$l/350$
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Total	$l/250^a$
		Total	$l/350 + \text{contraflecha}^b$
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ocorrido após a construção do piso	$l/600$
Efeitos em elementos não estruturais	Paredes	Após a construção da parede	$l/500^c$ e 10 mm e $\theta = 0,0017 \text{ rad}^d$
		Ocorrido após a instalação da divisória	$l/250^c$ e 25 mm

Efeitos em elementos estruturais	Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-os ao modelo estrutural adotado
----------------------------------	---	---

^a As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contra-flechas, de modo a não se ter acúmulo de água.

^b Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que $l/350$.

^c O vão l deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.

^d Rotação nos elementos que suportam paredes.

Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

Além disso, a verificação dos limites estabelecidos na tabela 5 deve ser realizado considerando a presença da armadura, assim como a existência de fissuras no concreto ao longo dessa armadura e as deformações diferidas no tempo, isto é, a rigidez efetiva das seções do elemento estrutural de acordo com a NBR 6118:2014.

Logo, quando os esforços não superarem aqueles que dão início à fissuração, a NBR 6118:2014 permite que flecha imediata das lajes possa ser calculada admitindo o concreto e o aço como materiais de comportamento elástico e linear, utilizando o módulo de elasticidade secante (E_{cs}) e considerando o efeito da fluência.

Toda via, quando os esforços superarem aqueles que dão início à fissuração, ou seja, quando o momento atuante (M_a) for superior ao momento de fissuração (M_r), pode ser utilizada a equação 8 para a determinação da rigidez equivalente segundo a NBR 6118:2014.

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (8)$$

onde:

M_a – é o momento fletor na seção crítica do vão considerado;

I_{II} – é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II, calculado com $\alpha_e = E_s/E_{cs}$.

Conforme a NBR 6118 a flecha adicional devido a fluência pode ser calculada de forma aproximada pela multiplicação da flecha imediata pelo fator α_f dado pela seguinte expressão:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50p'} \quad (9)$$

onde

p' – é a taxa de armadura comprimida;

ξ – é um coeficiente em função do tempo calculado pelas seguintes expressões:

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (10)$$

$$\xi(t) = 0,68 (0,996^t)t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (11)$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses} \quad (12)$$

sendo:

t o tempo, em meses, quando se deseja a flecha diferida;

t_0 a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração.

No entanto, a NBR 6118:2014 destaca que não se pode esperar grande precisão nas previsões dos deslocamentos, pois a deformação real da estrutura depende do processo construtivo, bem como das propriedades dos materiais no momento da solicitação, os quais possuem grande variabilidade.

2.2 Lajes nervuradas

Conforme Nappi (1993), as lajes nervuradas foram criadas como alternativa de laje com o intuito de eliminar o concreto onde o mesmo não é solicitado, reduzindo-se, portanto, o custo de execução.

Além disso, em grandes vãos a espessura necessária de lajes maciças de forma a atender o estado limite último e ao critério de pequenos deslocamentos transversais será elevada, logo, é interessante adotar um sistema estrutural com comportamento semelhante as placas (maciças), contudo, que apresente maior inércia e menor peso próprio. Diante disso, as lajes nervuradas são uma solução interessante pois em geral apresentam essas características (CARVALHO e PINHEIRO, 2013).

Então, as lajes nervuradas constituem a evolução das lajes maciças, pois neste sistema elimina-se a maior parte do concreto na zona tracionada resultando numa diminuição do peso próprio da estrutura e melhor aproveitamento das propriedades de seus materiais (FRANCA e FUSCO, 1997).

2.2.1 Definição

A NBR 6118:2014 define as lajes nervuradas como “lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos esteja localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte”.

Além disso, segundo Selistre (2000) esse tipo de laje é um conjunto de vigas T, constituída por nervuras ligadas entre si por placas de pequena espessura. Para Leonhardt e Mönning (1977) as lajes nervuradas são uma série de vigas T onde a distância entre as nervuras (w) é no máximo igual a 100 cm e a mesa da laje tem espessura maior que $w/15$ ou 5 cm.

Guerrin e Lavaur (2002) consideram que as lajes nervuradas são compostas de lajes finas apoiando-se sobre nervuras, podendo estas serem paralelas, ortogonais ou enviesadas.

Albuquerque (1999) define esse tipo de laje como um conjunto de nervuras solidarizadas por uma mesa de concreto. Além disso, o autor destaca que é possível discretizar a zona tracionada em forma de nervuras pois são as armaduras as responsáveis pelos esforços resistentes de tração, não avariando a zona comprimida, a qual será resistida pela mesa de concreto.

2.2.2 Vantagens e desvantagens

Conforme Albuquerque (1999) e Carvalho e Pinheiro (2013) a principal vantagem das lajes nervuradas é o aumento de inércia e a diminuição do peso próprio da estrutura. Diante disso, esse tipo de laje apresenta uma maior capacidade de carga e o uso dela faz com que haja um alívio de carga nas fundações.

Além disso, esse tipo de laje permite vencer grandes vãos diminuindo a quantidade de pilares, possuem grande versatilidade, apresentam as mesmas técnicas de execução e ainda podem ser utilizadas nos sistemas de lajes sem vigas, necessitando apenas regiões maciças próxima aos pilares (CARVALHO E PINHEIRO, 2013).

Souza e Cunha (1998) também destacam que quando há material de enchimento, este geralmente apresenta melhor desempenho térmico e acústico que o concreto.

Contudo, a utilização das lajes nervuradas dificulta a passagem de tubulações e aumenta a altura de cada pavimento e por consequência a altura da edificação (CARVALHO e PINHEIRO, 2013).

Souza e Cunha (1998) ainda enfatizam que a distribuição de cargas concentradas nas lajes nervuradas não é tão eficiente como nas lajes maciças e certas reservas de segurança existentes nessas ocorrem com menor intensidade em lajes nervuradas por elas serem menos monolíticas.

Araújo (2014) destaca que a altura das lajes nervuradas geralmente é cerca de 50% superior as das maciças, contudo, devido ao peso próprio menor, assim como o menor consumo de concreto, logo, segundo o autor, essa tipologia de laje se torna a solução mais econômica em vãos acima de 8 metros.

2.2.3 Lajes moldadas no local

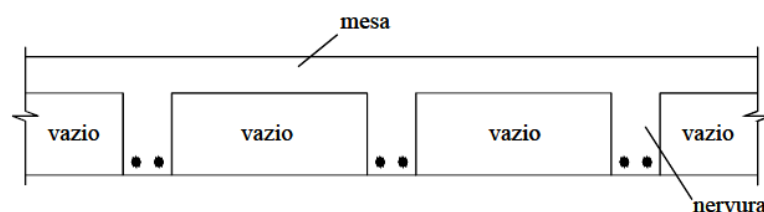
As lajes nervuradas moldadas no local, “in loco”, são as executadas na obra e na posição definitivas, que podem conter nervuras em uma ou duas direções onde estarão as armaduras de tração. Além disso, podem ter mesa superior ou inferior, assim como o uso de ambas simultaneamente. (BOCCHI Jr., 1995; SILVA, 2005)

Os espaços entre as nervuras podem ficar vazios ou podem ter elementos inertes, leves e sem funcionamento estrutural que funcionam também como fôrmas para as nervuras laterais e para a mesa superior (SILVA, 2005).

Conforme Silva (2005) e Carvalho e Pinheiro (2013) as lajes nervuradas moldadas no local podem ser classificadas em normal (direta), invertida ou duplas.

As lajes nervuradas do tipo normal, representada na figura 11, são aquelas em que as nervuras estão na parte inferior e que possui uma mesa superior de concreto, sendo estas bastante eficiente quanto a momentos fletores positivos, contudo, ineficiente nas zonas de momento fletores negativos (SILVA, 2005; CARVALHO e PINHEIRO, 2013).

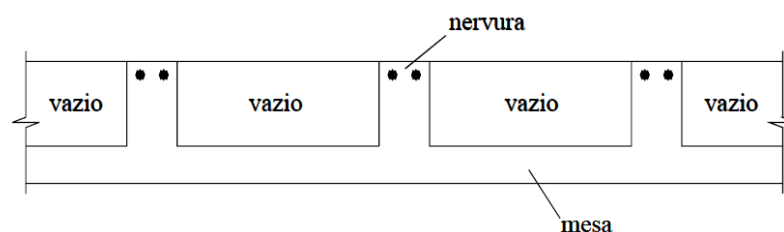
Figura 11 – Corte transversal de uma laje nervurada normal



Fonte: Silva (2005).

As lajes nervuradas do tipo invertida, representada na figura 12, são aquelas em que as nervuras estão na parte superior e que possui uma mesa inferior de concreto, sendo estas bastante eficiente quanto a momentos fletores negativos, contudo, ineficiente quanto a momento fletores positivos (SILVA, 2005; CARVALHO e PINHEIRO, 2013).

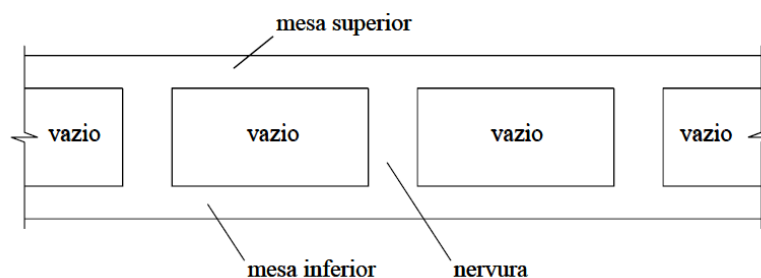
Figura 12 – Corte transversal de uma laje nervurada invertida



Fonte: Silva (2005).

As lajes nervuradas do tipo dupla, representada na figura 13, são aquelas em que as nervuras estão situadas entre duas mesas de concreto. Entre as nervuras pode ser colocado material de enchimento que servirá de fôrma para as nervuras, assim como para a mesa superior e quando não houver material de enchimento deverá ser usada uma fôrma, a qual será perdida (SILVA, 2005; CARVALHO e PINHEIRO, 2013).

Figura 13 – Corte transversal de uma laje nervurada dupla



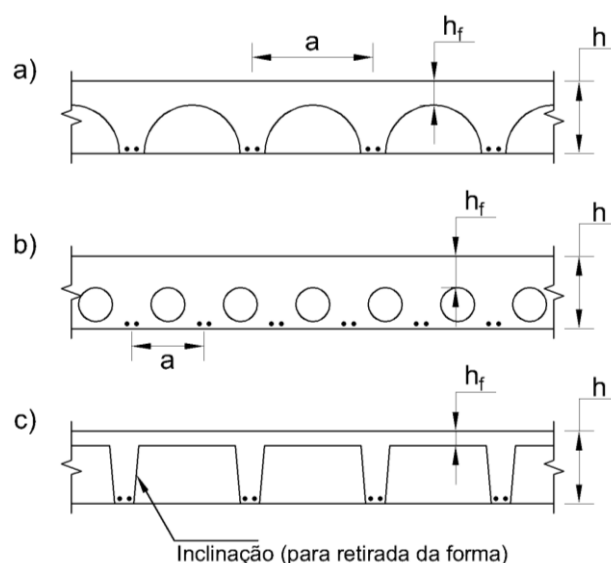
Fonte: Silva (2005).

Além disso, as lajes nervuradas duplas apresentam a grande desvantagem em relação as simples que a concretagem deve ser feita em duas etapas, ou seja, a laje inferior é concretada e apenas posteriormente é possível concretar as nervuras e a capa superior. (SOUZA e CUNHA, 1998)

Carvalho e Pinheiro (2013) ainda ressaltam que existem outros tipos de lajes nervuradas ou outros métodos de execução, tais como:

- laje nervurada meio tubo, na qual o formato dos espaçamentos entre as nervuras é meia circunferência, conforme mostra a figura 14a;
- laje nervurada estrutubo, na qual o formato dos espaçamentos entre as nervuras é uma circunferência, conforme mostra a figura 14b;
- laje nervurada modulada, na qual para facilitar a desforma e reaproveita-la as nervuras apresentam uma leve inclinação conforme mostra a figura 14c.

Figura 14 – Outros tipos de lajes nervuradas



Fonte: Adaptado pelo autor de Carvalho e Pinheiro (2013).

2.2.4 Lajes com nervuras pré-moldadas

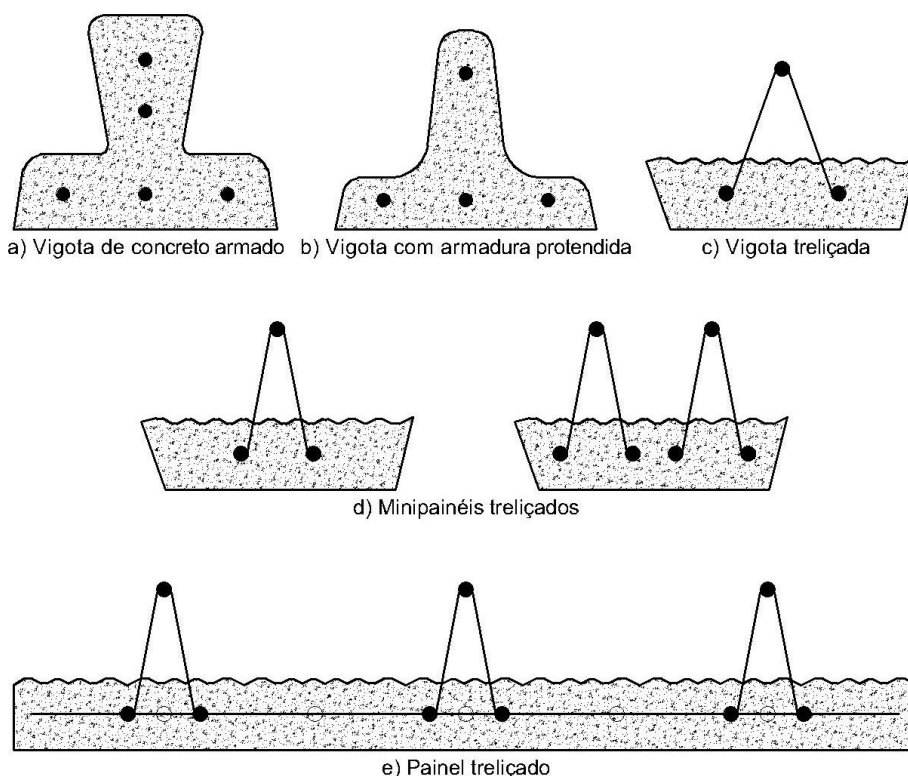
Lajes com nervuras pré-fabricadas ou pré-moldadas são aquelas em que parte das nervuras são construídas fora do local em que serão utilizadas. (BOCCHI Jr., 1995; SILVA, 2005). Além disso, segundo Carvalho e Pinheiro (2013) esse tipo de laje divide-se em nervuradas com vigotas, lajes alveolares ou duplo "T" (ou "π").

Segundo a NBR 14859-1:2016 – Lajes pré-fabricadas de concreto – Parte 1: Vigotas, minipainéis e painéis – Requisitos, as lajes pré-fabricadas são elementos estruturais planos capazes de vencer vãos e suportar os carregamentos de projeto, sendo constituído de elementos pré-fabricados, estruturais e inertes de enchimento e/ou de forma permanente, além de complementos de armadura e concreto de obra, podendo ser nervurada unidirecional ou bidirecional com seção “T” ou nervurada unidirecional ou bidirecional com seção duplo “T”.

A seguir são apresentados os tipos de elementos pré-fabricados estruturais segundo a NBR 14859-1:2016, bem como suas ilustrações conforme mostra a figura 15.

- a) vigota com armadura simples ou comum (VC): elementos pré-fabricado estrutural constituído de armadura passiva e concreto estrutural;
- b) vigota com armadura protendida (VP): elementos pré-fabricado estrutural constituído de armadura ativa e concreto estrutural;
- c) vigota com armadura treliçada (VT): elementos pré-fabricado estrutural, constituído de armadura eletrossoldada, concreto estrutural e se necessário, capaz de alojar armadura passiva inferior de tração;
- d) minipainel treliçado (MPT): elementos pré-fabricado estrutural com largura inferior a 400 mm, constituído de armadura eletrossoldada, concreto estrutural e se necessário, capaz de alojar armadura passiva inferior de tração;
- e) painel treliçado (PT): elementos pré-fabricado estrutural com largura inferior a 400 mm, constituído de armadura eletrossoldada, concreto estrutural e se necessário, capaz de alojar armadura passiva inferior de tração;

Figura 15 – Elementos pré-fabricados estruturais para lajes



Fonte: Adaptado da NBR 14859-1:2016 pelo autor.

2.2.5 Elementos de enchimento

Conforme Silva (2005), quando se utiliza elementos de enchimento em lajes nervuradas é aconselhável que os materiais tenham peso específico e preço menor que o do concreto, além disso, os materiais utilizados devem ser inertes, não terão função estrutural e irão permanecer no local após a construção da laje. Segundo o mesmo autor os materiais mais utilizados como elementos de enchimento são os tijolos cerâmicos furados, blocos de concreto celular e os blocos de poliestireno expandido (EPS).

Dentre os elementos de enchimento, os blocos de EPS são os mais leves, o que facilita o seu manuseio e reduz o peso próprio da estrutura. Além disso, são fáceis de cortar, apresentam bom isolamento térmico e acústico, além da baixa absorção de água, a qual permite uma cura mais rápida e melhor do concreto (ALBUQUERQUE, 1999; SILVA, 2002; SILVA, 2005). Ademais, Silva (2002) destaca que esse material não mofa, não serve de alimento para microrganismos, apresenta custo acessível,

pode ser estocado naturalmente ao tempo e em caso de incêndio não propaga chamas.

Contudo, o EPS não pode receber diretamente o revestimento da face inferior da laje, sendo necessário a utilização de um aditivo de base acrílica que faça a ligação entre os materiais de natureza cristalina (chapisco) e o EPS (SILVA, 2002; SILVA, 2005).

O uso do concreto celular autoclavado em lajes nervuradas tem como vantagem a facilidade da execução da concretagem, das instalações e da montagem das armaduras, pois é um material de fácil manuseio e é facilmente cortado. Além disso, pode receber diretamente o revestimento final e apresenta baixo peso específico o que diminui o peso próprio da estrutura (SILVA, 2002).

Silva (2005) ainda destaca que este é um material homogêneo, resistente, de baixa condutividade térmica, de elevada fluidez e que possui boas características de isolamento térmico e acústico.

O terceiro tipo de material de enchimento utilizado atualmente é o tijolo cerâmico, o qual apresenta peso específico aparente um pouco maior que os demais tipos de enchimento, contudo, ainda menor que o concreto armado. Esse tipo de material deve suportar o peso das pessoas e equipamentos que irão trafegar sobre os mesmos durante a etapa de concretagem da laje, na qual os tijolos cerâmicos devem ser constantemente molhados com o objetivo que os mesmos não absorvam água do concreto, além disso, esse tipo de elemento de enchimento não permite o corte. (SILVA, 2005)

Ademais, conforme destaca Silva (2005), em lajes nervuradas moldadas no local onde opta-se por deixarem os espaços entre as nervuras vazios há a necessidade de se utilizar forma em toda laje, ou seja, na face inferior da mesa e faces laterais e inferior das nervuras. Conforme destaca o autor, devido aos altos custos da madeira tem-se optado pela utilização de fôrmas de polipropileno, as quais são reaproveitáveis além de serem leves e de fácil manuseio e proporcionarem grande precisão nas dimensões e acabamento.

2.2.6 Recomendações normativas

A NBR 6118:2014 impõe valores mínimos de espessuras a serem considerados em lajes nervuradas, conforme é mostrado a seguir:

A espessura da mesa, quando não existirem tubulações horizontais embutidas, deve ser maior ou igual a $1/15$ da distância entre as faces das nervuras (l_0) e não menor que 4 cm.

O valor mínimo absoluto da espessura da mesa deve ser 5 cm, quando existirem tubulações embutidas de diâmetro menor ou igual a 10 mm. Para tubulações com diâmetro Φ maior que 10 mm, mesa deve ter a espessura mínima de $4 \text{ cm} + \Phi$, ou $4 \text{ cm} + 2\Phi$ no caso de haver cruzamento destas tubulações.

A espessura das nervuras não pode ser inferior a 5 cm.

Nervuras com espessura menor que 8 cm não podem conter armadura de compressão.

Além disso, a mesma norma prevê as seguintes condições para o projeto de lajes nervuradas:

a) para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras menor ou igual a 65 cm, pode ser dispensada a verificação da flexão da mesa, e para a verificação do cisalhamento da região das nervuras, permite-se a consideração dos critérios de laje;

b) para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras entre 65 cm e 110 cm, exige-se a verificação da flexão da mesa, e as nervuras devem ser verificadas ao cisalhamento como vigas; permite-se essa verificação como lajes se o espaçamento entre eixos de nervuras for até 90 cm e a largura média das nervuras for maior que 12 cm;

c) para lajes nervuradas com espaçamento entre eixos de nervuras maior que 110 cm, a mesa deve ser projetada como laje maciça, apoiada na grelha de vigas, respeitando-se os seus limites mínimos de espessura.

De acordo com NBR 6118:2014, se essas hipóteses não forem atendidas, a laje nervurada deve ser analisada como uma laje maciça apoiada em uma grelha de vigas. Além disso, quando houver necessidade de estribos em lajes nervuradas, esses não podem ter espaçamento superior à 20 cm.

Ademais, a NBR 6118:2014 exige que o cálculo de lajes nervuradas unidirecionais deve ser feito na direção das nervuradas desprezando-se a rigidez à torção e rigidez transversal. Já nos casos de lajes nervuradas bidirecionais, os esforços podem ser obtidos como lajes maciças.

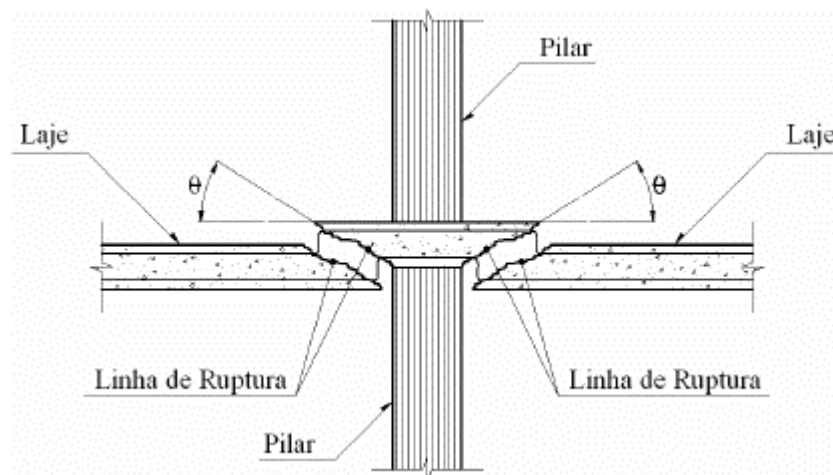
2.2.7 Punção em lajes

Conforme Araújo (2014), punção é o estado limite último por cisalhamento no entorno de forças concentradas. Esse fenômeno, conforme destaca Souza e Cunha (1998), é de suma importância em lajes apoiadas diretamente sobre pilares pois esse

esforço será o determinante para o dimensionamento e por apresentar ruptura brusca, isso é, sem aviso prévio.

Segundo Donin (2007), a ruína por punção é caracterizada por uma superfície troncônica ou tronco-piramidal, cujas arestas têm inclinação θ entre 25 e 30° em relação ao plano médio da placa, conforme mostra a figura 16.

Figura 16 – Superfície de ruptura à punção



Fonte: Donin (2007).

Na NBR 6118:2014, o modelo de cálculo para o dimensionamento de lajes à punção consiste na verificação em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno de forças concentradas.

2.2.8 Métodos de cálculo

Araújo (2014) destaca que de acordo com a NBR 6118:2014 se as prescrições contidas nesta forem atendidas, pode-se calcular os esforços como se a laje fosse maciça.

De acordo com Donin (2007) há diversos métodos de cálculo que podem utilizados na solução das lajes nervuradas e lajes cogumelo-nervuradas, tais como a teoria clássica de placas, o método da analogia por grelhas, o método dos pórticos equivalentes e o método dos elementos finitos.

Segundo Dias (2003), os esforços nas lajes nervuradas podem ser obtidos através de métodos simplificados, tais como a analogia de placa ou teoria da placa ortótropa equivalente, analogia de grelha, processo dos pórticos múltiplos proposto pela NB1:1978 e o processo dos pórticos equivalentes.

2.2.8.1 Teoria das placas

Conforme Timoshenko e Woinoswsky-Kriger (1959), as propriedades de flexão de uma placa têm grande influência da sua espessura e da grandeza dos deslocamentos. Dessa forma, o estudo de placas segundo a teoria de placas pode ser realizado de acordo com três tipos de placas:

- a) finas sujeitas a pequenos deslocamentos;
- b) finas sujeitas a grandes deslocamentos;
- c) espessas

Os dois últimos casos não são abordados neste trabalho, contudo, pode ser visto em Timoshenko e Woinoswsky-Kriger (1959). Diante disso, a seguir é apresentado a teoria clássica de placas delgadas

2.2.8.1.1 Teoria clássica das placas delgadas

De acordo com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) quando as deflexões transversais de uma placa são pequenas em comparação com sua espessura a teoria das placas pode ser desenvolvida levando-se em conta as seguintes hipóteses:

- a) Não há deformações no plano médio da placa. Esse plano se mantém neutro durante a curvatura;
- b) Não se leva em conta as forças cortantes para a determinação das deflexões das placas;
- c) Não são consideradas esforços normais na direção transversa da placa.

Diante disso, segundo Silva (2005) e Donin (2007) a equação diferencial geral de placas é expressa pela equação 13.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -p(x, y) \quad (13)$$

Conforme Silva (2005) essa equação é obtida através do equilíbrio de forças verticais e momentos fletores em um elemento infinitesimal de placas e tal equação independe da placa estar em regime elástico ou plástico, bem como do coeficiente de Poisson, ou de ser isotropa ou ortótropa.

Também é possível relacionar as solicitações com os deslocamentos através das expressões que relacionam as curvaturas das placas com os esforços solicitantes, expressos nas equações 14, 15 e 16. (SILVA, 2005; DONIN, 2007)

$$m_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

$$m_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (15)$$

$$m_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

onde w é a flecha em um ponto qualquer da placa e D é a rigidez à flexão da placa é dada pela equação 17.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (17)$$

em que

E – é o módulo de deformação longitudinal do material;

h – espessura da placa;

ν – coeficiente de Poisson.

As expressões 18 e 19 relacionam as curvaturas das placas com os esforços cortantes.

$$q_x = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (18)$$

$$q_y = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (19)$$

Substituindo-se as equações 14, 15 e 16 na equação 13 tem-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{-p(x, y)}{D} \quad (20)$$

A expressão 20 corresponde então a equação diferencial de placas, conhecida como equação de Lagrange, que pode ser descrita segundo Donin (2007) como:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (21)$$

Sendo ∇^2 o operador laplaciano dado por

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad (22)$$

2.2.8.1.2 Teoria de placas para lajes nervuradas

Donin (2007) levando em conta o modelo de laje ortótropa, no qual pode ser empregado modelos elástico e rígidos-plásticos aproximados ou exatos, mostrou que a solução da equação de Lagrange para lajes nervuradas é:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2H_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = p \quad (23)$$

onde

$$E_x = E_y = E \quad (24)$$

$$V_x = V_y = E \quad (25)$$

$$G_{xy} = E \quad (26)$$

$$D_x = D_y = D \quad (27)$$

$$H_1 = \left(E \frac{\nu}{1 - \nu^2} + 2G \right) \frac{h^3}{12} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (28)$$

Ainda segundo Donin (2007), pode se adaptar a solução considerando-se na expressão 23 os seguintes fatores:

$$D_x = \frac{B_x}{B_y} \quad (29)$$

$$D_y = \frac{B_y}{B_x} \quad (30)$$

$$D_1 = \nu \sqrt{D_x D_y} \cong 0 \quad (31)$$

$$D_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{C_x}{b_y} + \frac{C_y}{b_x} \right) \quad (32)$$

onde

B_x – é a rigidez à flexão das nervuras paralelas ao eixo x;

B_y – é a rigidez à flexão das nervuras paralelas ao eixo y;

b_x, b_y – são os espaçamentos axiais das nervuras paralelas aos eixos x e y;

C_x – é a rigidez à torção das nervuras paralelas ao eixo x;

C_y – é a rigidez à torção das nervuras paralelas ao eixo y.

dos quais se obtém a equação para lajes nervuradas:

$$\frac{B_x}{B_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{B_y}{B_x} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \left(\frac{C_x}{b_y} + \frac{C_y}{b_x} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (33)$$

2.2.8.1.3 Cálculo como laje maciça com espessura equivalente

Conforme Donin (2007), de modo a simplificar a análise estrutural de lajes nervuradas utiliza-se uma seção maciça de espessura equivalente à seção da laje nervurada, e então calcula-se os esforços através da teoria de placas.

Araújo (2006) destaca que o procedimento correto para a determinação da espessura equivalente é através da equivalência da energia de deformação. Segundo o autor, os principais esforços que contribuem para a energia de deformação de uma laje são os momentos fletores M_x e M_y , e o momento torçor M_{xy} . Além disso, a lajes também estará sujeita aos esforços de membrana N_x , N_y e N_{xy} , os quais serão nulos se a laje estiver livre para se deslocar no plano horizontal, logo esses esforços são desconsiderados no cálculo da energia de deformação.

As curvaturas são definidas como:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (34)$$

Onde $w = w(x,y)$ são os deslocamentos transversais do plano médio da laje.

Os momentos são relacionados com as curvaturas na forma, conforme mostra as equações 35, 36 e 37.

$$M_x = -D(x,y)(k_x + \nu k_y) \quad (35)$$

$$M_y = -D(x,y)(k_y + \nu k_x) \quad (36)$$

$$M_{xy} = -D(x,y)(1 - \nu)k_{xy} \quad (37)$$

Sendo $D(x,y)$ a rigidez da laje em um ponto qualquer de coordenadas (x,y) e ν é o coeficiente de Poisson

A energia de deformação (U) é dada pela equação.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} D(x,y) \psi(x,y) dx dy \quad (38)$$

Onde

$$\psi(x,y) = k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + 2(1 - \nu)k_{xy}^2 \quad (39)$$

Como a laje maciça equivalente possui rigidez constante D_e , e sua energia de deformação é.

$$U = \frac{1}{2} D_e \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \psi(x,y) dx dy \quad (40)$$

Logo, quando se iguala as equações anteriores, obtém-se a seguinte expressão para a rigidez equivalente da laje nervurada:

$$D_e = \frac{\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} D(x, y) \psi(x, y) dx dy}{\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \psi(x, y) dx dy} \quad (41)$$

A rigidez equivalente pode ser escrita na forma da equação 42.

$$D_e = E_{cs} I_e \quad (42)$$

onde

E_{cs} – é o módulo secante do concreto;

I_e – é a inércia equivalente, em que $I_e = D_e$ quando $E_{cs} = 1$.

Logo, em termos de espessura equivalente ($h_{e,cal}$) têm-se:

$$D_e = \frac{E_{cs} h_{e,cal}^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (43)$$

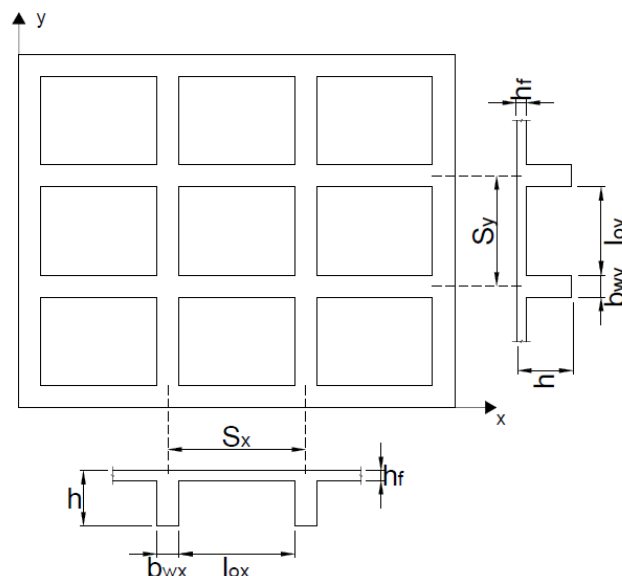
então

$$h_{e,cal} = [12(1 - \nu) I_e]^{1/3} \quad (44)$$

Contudo, devido a esse método apresentar um procedimento rigoroso, o qual exige a utilização de um método numérico, pode-se determinar a espessura equivalente por dois processos simplificados, o da rigidez média e o da igualdade do momento de inércia das seções T (ARAÚJO, 2014).

A seguir é apresentado o processo simplificado da rigidez média conforme Araújo (2014), para uma laje ortotrópica como a demonstrada na figura 17.

Figura 17 – Laje nervurada ortotrópica



Fonte: Adaptado pelo autor de Araújo (2014).

A rigidez das nervuras, D_1 , pode ser obtida pela equação 45. Assim como a rigidez da mesa, D_2 , pode ser obtida pela equação 46.

$$D_1 = \frac{E_{CS} h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (45)$$

$$D_2 = \frac{E_{CS} h_f^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (46)$$

Onde h é a espessura total da laje e h_f é a espessura da mesa. Além disso, o ν é o coeficiente de Poisson do concreto, que conforme a NBR 6118:2014 pode ser adotado com 0,2.

A rigidez equivalente (D_e) da laje nervurada é dada por

$$D_e = (1 - \xi)D_1 + D_2 \quad (47)$$

onde

$$\xi = \frac{l_{ox} l_{oy}}{S_x S_y} \quad (48)$$

Logo, a rigidez equivalente pode também ser escrita conforme a expressão a seguir.

$$D_e = \frac{E_{CS} h_e^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (49)$$

Sendo h_e a espessura equivalente da laje nervurada, o qual é expressa pela equação 50.

$$h_e = [(1 - \xi)h^3 + \xi h_f^3]^{\frac{1}{3}} \quad (50)$$

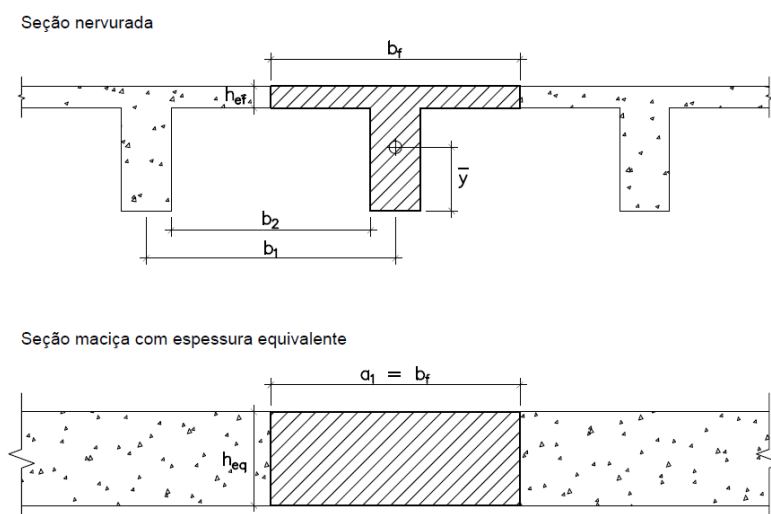
Já o outro procedimento simplificado consiste em calcular uma seção retangular com momento de inércia igual a seção "T" formada pelas nervuras e pela mesa, conforme é exemplificado na figura 18 e a espessura equivalente é calculada conforme a expressão 51 (ABDUL-WAHAB e KHALIL, 2000).

$$h_{eq} = \left(\frac{12I}{b_f} \right)^{1/3} \quad (51)$$

onde

I – é o momento de inércia em relação ao centroide da seção "T" de cada nervura conforme a figura 18.

Figura 18 – Transformação na laje maciça de espessura equivalente



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.8.2 Analogia de grelha

Segundo Timoshenko (1959), a analogia de grelha foi utilizada inicialmente por Marcus em 1932 para a resolução de placas com bordas indeslocáveis verticalmente.

Atualmente, com a evolução da informática, tornou-se comum a utilização desse método para a determinação dos esforços solicitantes e deslocamentos em lajes. BOCCHI Jr., (1995). Além disso, segundo Silva (2005), diversos programas comerciais de grande aceitação no mercado utilizam esse método para a análise de estruturas.

Conforme Figueiredo Filho (1989), o processo da analogia de grelha consiste em substituir uma placa por uma malha de vigas equivalente, onde as cargas distribuídas se dividem entre as vigas de acordo com a área de influência de cada uma. Além disso, as cargas concentradas devem ser aplicadas nos nós da malha, de tal forma que se a posição não coincidir com um nó, a carga considerada deve ser aplicada nos nós próximos com um valor equivalente (FIGUEIREDO FILHO, 1989; CARVALHO, 1994).

Em lajes nervuradas para a aplicação do processo de grelha equivalente as nervuras e as vigas são substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, obtendo-se assim uma grelha equivalente, nas quais adota-se a seção em formas de “T” para o elemento que representa as nervuras e retangular para àquele que representa as vigas do pavimento (SILVA, 2005).

Além disso, a rigidez à flexão e à torção deve ser tal que quando a estrutura real for carregada se obtenha o mesmo estado de deformação e as mesmas solicitações que a grelha equivalente sujeita ao carregamento (DONIN, 2007).

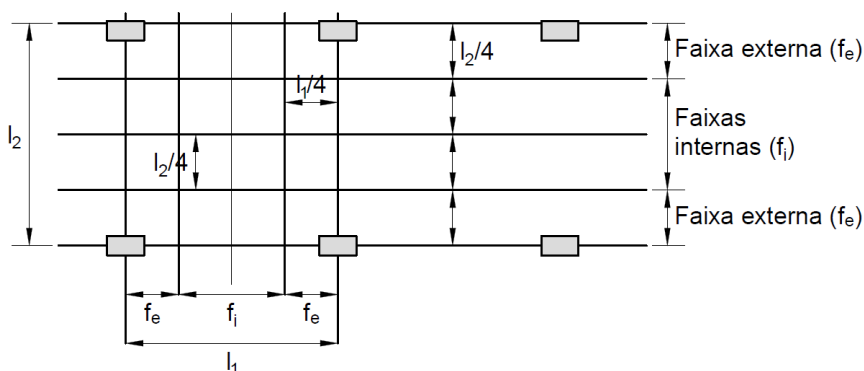
Ademais, Donin (2007) destaca que a determinação das solicitações e deslocamentos através da analogia de grelha pode ser realizado do método dos elementos finitos ou por meio de formulação matricial.

2.2.8.3 Método dos pórticos equivalentes

Em lajes nervuradas apoiadas diretamente em pilares, a NBR 6118:2014 recomenda que a análise estrutural desse tipo de estrutura seja realizada através de métodos numéricos, tais como o método dos elementos finitos.

Contudo, a norma permite para os casos em que os pilares dispostos em filas ortogonais de maneira regular e com vãos pouco diferentes o uso do método dos pórticos equivalentes. Logo, é considerado que cada laje esteja dividida em duas series ortogonais de vigas, considerando para o cálculo das inércias as larguras das faixas limitada pela metade da distância entre duas linhas de pilares, conforme mostra a figura 19.

Figura 19 – Faixas de lajes para a distribuição dos esforços



Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

Segundo a NBR 6118:2014, a distribuição dos momentos fletores nas faixas da laje é feita da seguinte maneira:

- 45 % dos momentos positivos para as duas faixas internas;
- 27,5 % dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- 25 % dos momentos negativos para as duas faixas internas;

d) 37,5 % dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

2.3 Método dos elementos finitos

Desde a antiguidade o ser humano diante de um problema complexo apresenta a intuição de dividir a questão em problemas menores, de forma que resolvendo essas partes consiga-se chegar a um resultado aproximado do problema como um todo.

O método dos elementos finitos apresenta um conceito análogo a esse, pois através desse método, divide-se a estrutura em elementos mais pequenos ligados através de nós.

Conforme Logan (2007), esse método nasceu a partir de vários trabalhos ao longo dos anos, começando por McHenry e Hrennikoff na década de 40 que substituíram sólidos contínuos por barras.

Já nos anos 50 quando Anrgyris e Kesley determinaram e analisaram fuselagens e asas de aviões utilizando a formulação matricial do método de Rayleigh-Rite, que leva em consideração que os esforços internos obtidos através do estudo das tensões precisam estar em equilíbrio com as ações externas (ASSAN, 2003).

Mas foi apenas em 1956 com o trabalho publicado por Turner, Clough, Martin e Topp que a formulação dos métodos dos elementos finitos como é utilizado até hoje foi utilizada pela primeira vez (ASSAN, 2003).

Além disso, em 1960, Clough analisou as tensões planas usando elementos triangulares e quadrados e utilizou pela primeira vez até então o termo elementos finitos (LOGAN, 2007).

2.3.1 Definição

O método dos elementos finitos (MEF) é um método aproximado no qual o elemento estrutural a ser analisado é dividido em elementos de dimensões finitas denominado elementos finitos, os quais estão conectados através de nós (SORIANO, 2003).

Segundo Logan (2007), no método dos elementos finitos a solução de uma estrutura é feita através das solução e combinação das equações para cada um dos elementos finitos, os quais a estrutura é dividida.

Conforme Alves Filho (2003), a análise de qualquer estrutura pelo MEF é dividida em três grandes etapas:

- a) Pré-processamento: consiste no estudo do problema estrutural a ser analisado, ou seja, monta-se o modelo discretizado da estrutura e aplica-se as condições de contorno neste. Nesta etapa define-se cargas e os pontos de vinculação, bem como a malha de elementos finitos a ser utilizada, além de estabelecer a relação entre o comportamento físico real e os elementos para reproduzir este comportamento;
- b) Processamento: consiste nos cálculos matriciais para a determinação dos deslocamentos, reações de apoio e forças internas dos elementos;
- c) Pós-processamento: consiste na interpretação dos resultados numérico e sua coerência com o problema físico.

2.3.2 Formulação

Segundo Logan (2007), nos problemas estruturais mecânicos há duas abordagens tradicionais associadas com o método dos elementos finitos. A primeira é a da força ou método da flexibilidade, onde primeiramente é utilizado as equações de equilíbrio para obter-se as equações governamentais, então, o resultado é uma série de equações de forma a determinar as forças desconhecidas, as quais são as incógnitas dessa abordagem.

Já o segundo método, chamado de deslocamento ou método da rigidez, as incógnitas do problema a ser analisado são os deslocamentos e a solução se dá primeiramente garantindo que depois dos deslocamentos os elementos conectados num mesmo nó, numa mesma borda ou superfície mantem-se conectados, então, usando equações de equilíbrio e uma lei de relação de forças com deslocamentos, nesse caso, as equações governamentais são expressas nos termos dos deslocamentos (LOGAN, 2007).

Conforme Logan (2007), as duas abordagens resultam em diferentes matrizes associadas com as suas formulações em diferentes incógnitas da análise. Além disso, segundo o autor e Araújo (2014), o método da rigidez tem se mostrado melhor para a aplicação computacional pois tal a formulação desse método é mais simples para a maioria dos problemas de análise estrutural.

2.3.3 Elementos

A escolha certa do tipo de elemento é fundamental, pois no MEF o equilíbrio de cada elemento finito isoladamente será a substituição ao equilíbrio infinitesimal do modelo matemático de meio contínuo (SORIANO, 2003).

Conforme Alves Filho (2003), são três as categorias de elementos:

- a) Elementos de “geometria” unidimensional: são os elementos de eixo reto tais como as vigas e treliças;
- b) Elementos de “geometria” bidimensional: tais como as chapas, placas e membranas;
- c) Elementos de “geometria” tridimensional: apresentam lados retos ou curvos, são os chamados sólidos.

Conforme Soriano (2003), é fundamental analisar o campo de deslocamento adotado no tipo de elemento escolhido, de forma a verificar se o resultado tende a convergir para a solução exata à medida que a malha é refinada.

2.3.4 Tipos de análise

As estruturas estão em geral submetidas a ações dinâmicas, onde devem ser consideradas as forças de inércia associadas às acelerações. No entanto, é razoável considerar que as ações aplicadas nas estruturas ocorrem de um modo suficientemente lento, o que torna desprezíveis as forças de inércia. Quando se considera essa simplificação, a análise é designada como estática (AZEVEDO, 2003).

Este trabalho tem por objetivo a análise estática, diante disso, não será abordado tópicos sobre a dinâmica em estruturas.

Dentro da estática, existe dois tipos de análises possíveis de se realizar, as quais são apresentadas a seguir:

2.3.4.1 Análise linear

Na análise linear considera-se que os deslocamentos sejam diretamente proporcionais à tensão aplicada, logo, pode-se utilizar o princípio da superposição dos efeitos (SCHWETZ, 2011; RECALDE, 2014). Além disso, segundo Azevedo (2003), nestas circunstâncias, considera-se que o elemento estrutural após o carregamento

se mantém inderformado, isso é, com a mesma geometria que antes da aplicação de carga.

2.3.4.2 Análise não linear

São dois os fatores que resultam no comportamento não linear de uma estrutura a medida que é aplicado um carregamento: a alteração das propriedades dos materiais e a alteração da geometria da estrutura, designadas respectivamente de não linearidade física e não linearidade geométrica (SCHWETZ, 2011).

Dessa forma, segundo Schwetz (2011) a não linearidade geométrica ocorre pois a deformação da estrutura altera as condições do carregamento, logo, os esforços são amplificados à medida que a estrutura se deforma.

Já o outro caso de não linearidade, a física, ocorre pela perda de rigidez dos elementos durante o carregamento da estrutura. Nas estruturas de concreto armado esse efeito se deve a não linearidade constitutiva dos materiais assim como os efeitos de fissuração do concreto (RECALDE, 2014).

Diante disso, Stramandiolli (2007) destaca que para realizar uma análise realista do comportamento de estruturas de concreto é preciso levar em conta a não linearidade das relações tensão/deformação. Logo, para uma análise não linear é necessário conhecer o comportamento dos materiais de forma a definir um modelo que possa ser utilizado na análise computacional.

Segundo Stramandiolli (2007), o modelo mais simples e utilizado na análise de estruturas é o modelo elástico, no qual a tensão é proporcional a deformação. Outro modelo utilizado é o modelo plástico, no qual há o aparecimento de deformações residuais quando ocorre o descarregamento aplicado. Além disso, os dois modelos anteriores podem ser combinados, surgindo modelos elasto-plásticos, assim como pode se utilizar modelos que utilizam a mecânica da fratura e do dano para tentar reproduzir o mecanismo interno de microfissuras que surgem em materiais frágeis, tal como o concreto.

2.3.5 Pós-processamento

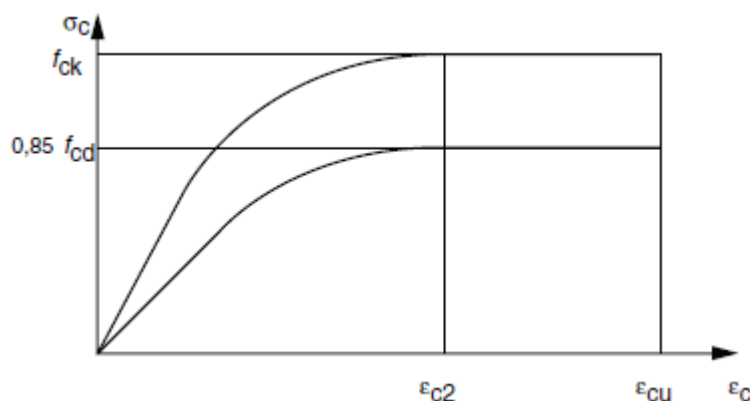
Conforme Alves Filho (2003), a solução obtida pelo MEF é sempre uma aproximação, dessa forma deve-se avaliar a convergência dos resultados, a qual está diretamente associada com a função de interpolação escolhida.

Soriano (2003) diz que o campo de deslocamentos de determinado elemento conduz a malhas de elementos, as quais convergem para a solução exata, à medida que se refina essas malhas. Essa convergência pode ser estabelecida pelo refinamento através da redução do tamanho dos elementos ou pelo aumento da ordem do campo de deslocamentos dos elementos.

2.4 Modelos constitutivos da NBR 6118:2014

A NBR 6118:2014 apresenta um diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto, conforme a figura 20 e equação 52, para análises no estado-limite último.

Figura 20 – Diagrama tensão-deformação idealizado pela NBR 6118:2014



Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (52)$$

onde

$n = 2$ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa

e para concretos com $f_{ck} > 50$ MPa o coeficiente n é calculado pela expressão abaixo:

$$n = 1,4 + 23,4 \left[\frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4 \quad (53)$$

Sendo os parâmetros de deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico (ϵ_{c2}) e de deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura (ϵ_{cu}) definidos da seguinte forma:

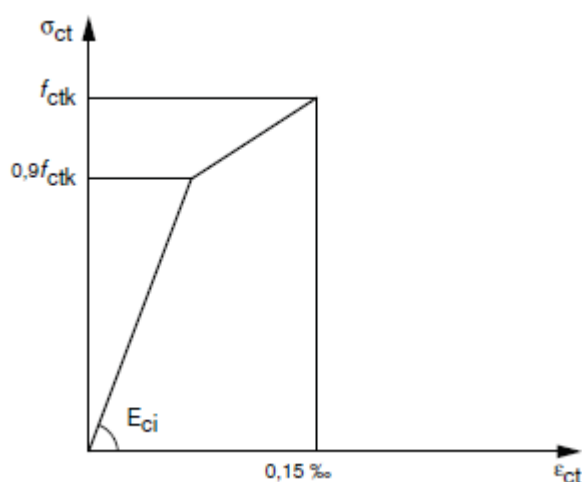
$\epsilon_{c2} = 2 \text{ ‰}$ e $\epsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ para concretos até C50 e calculados pelas equações 54 e 55 para concretos de classes C55 até C90.

$$\epsilon_{c2} = 2,0 \text{ ‰} + 0,085 \text{ ‰} (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (54)$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6 \text{ ‰} + 35 \text{ ‰} [(90 - f_{ck})/100]^4 \quad (55)$$

A NBR 6118:2014 também apresenta um diagrama tensão-deformação bilinear de tração para o concreto não fissurado, conforme mostra a figura 21.

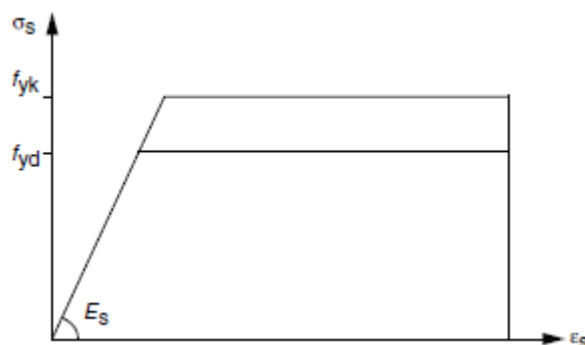
Figura 21 – Diagrama tensão-deformação de tração segundo a NBR 6118:2014



Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

Além dos parâmetros do concreto, a NBR 6118:2014 também faz recomendações quanto as propriedades do aço de armaduras passivas. A norma brasileira admite adotar na falta de ensaios ou dados fornecidos pelo fabricante o módulo de elasticidade do aço igual à 210 GPa e também apresenta um diagrama tensão-deformação idealizado, conforme mostra a figura 22.

Figura 22 – Diagrama tensão-deformação para o aço

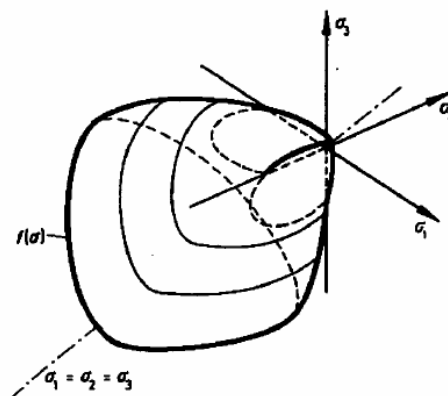


Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014 pelo autor.

2.5 Teoria de Willam e Warnke

Willam e Warnke (1974) desenvolveram um critério de ruptura do concreto no estado multiaxial de tensões. A superfície de ruptura no espaço de tensões principais por ser visualizada na figura 23, onde os componentes de tensão, representam as tensões principais.

Figura 23 – Superfície de ruptura do concreto simples no estado triaxial de tensões



Fonte: Willam e Warnke (1974).

No ANSYS, o critério de ruptura do concreto no estado multiaxial de tensões proposto por Willam e Warnke (1974) é expresso pela equação 56. Se essa expressão for satisfeita, ocorrerá esmagamento ou fissura do concreto.

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0 \quad (56)$$

onde

F – é a função do estado de tensões principais;

S – é a superfície de ruptura expressa nos termos das tensões principais e dos cinco parâmetros e o estado de tensões hidrostático:

f_t – é a tensão limite à tração;

f_c – é a tensão limite uniaxial à compressão;

f_{cb} – é a tensão limite biaxial à compressão;

σ_h^a – representa o estado de tensões hidrostático;

f_1 – tensão limite biaxial à compressão no estado de tensões hidrostático (f_1);

f_2 – tensão limite uniaxial à compressão no estado de tensões hidrostático (f_2).

Contudo, quando a condição expressa na equação 57 for atendida a superfície de ruptura pode ser obtida com apenas dois parâmetros, f_t e f_c , sendo as outras três calculadas conforme Willam e Warnke (1974) através das equações 58, 59 e 60.

$$|\sigma_h| = \leq \sqrt{3} f_c \quad (57)$$

$$\sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_{xp} + \sigma_{yp} + \sigma_{zp}) \quad (58)$$

$$f_{cb} = 1,2f_c \quad (59)$$

$$f_1 = 1,45f_c \quad (60)$$

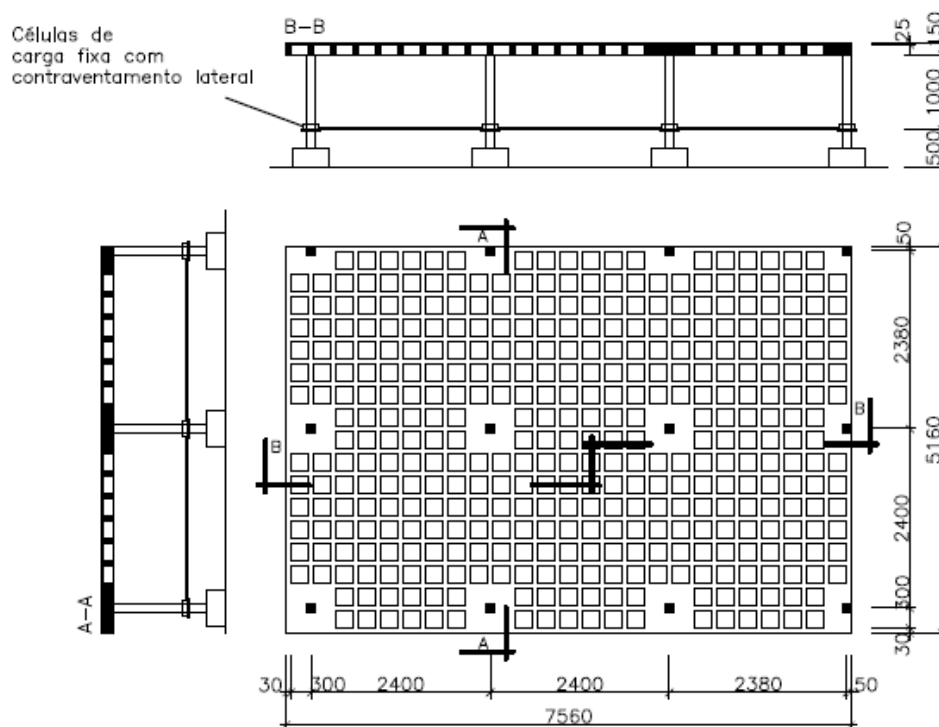
Além disso, quando a capacidade de esmagamento do concreto é suprimida (adotada como -1), o material fatura a qualquer momento que uma das tensões principais excede a tensão limite à tração.

2.6 Pesquisas

A seguir, são apresentados diversos estudos numéricos, assim como experimentais do comportamento à flexão de lajes nervuradas de concreto armado, através dos quais serão escolhidos alguns para a análise numérica a ser realizada posteriormente.

Ajdukiewicz e Kliszczewicz (1986) apresentaram um estudo experimental em modelo reduzido de uma laje nervurada apoiada em doze colunas com ábacos conforme mostra a figura 24.

Figura 24 – Geometria da laje ensaiada por Ajdukiewicz e Kliszczewicz



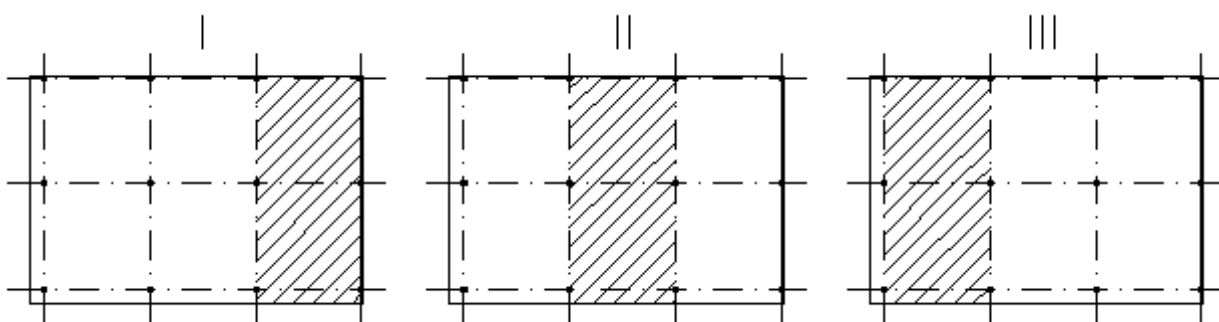
Fonte: Adaptado de Ajdukiewicz e Kliszczewicz (1986) pelo autor.

O teste realizado pelos autores foi dividido em três etapas, sendo a primeira na fase elástica, na qual o modelo foi carregado várias vezes da seguinte forma:

- Carregamento uniformemente distribuído sobre toda a superfície;
- Carregamento uniformemente distribuído em faixas;
- Carregamento linear sobre as bordas;
- Deslocamento vertical dos apoios, de forma sucessiva.

Na segunda etapa investigou-se através do carregamento de quatro painéis adjacentes o nível de carga no qual apresentou-se o início de fissuras nos vãos e próximo aos apoios. Na última etapa investigou-se o modelo de fissuras para determinar o mecanismo de falha da estrutura. O carregamento foi realizado em três faixas separadamente, em sucessão, conforme é mostrado na figura 25.

Figura 25 – Faixas de carregamento da última etapa dos ensaios

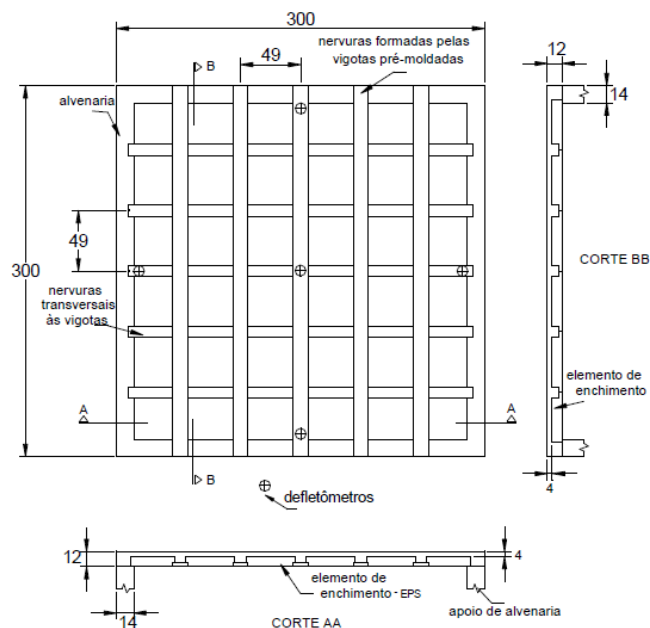


Fonte: Adaptado de Ajdukiewicz e Kliszczewicz (1986) pelo autor.

Segundo Ajdukiewicz e Kliszczewicz (1986), o experimento ressaltou as vantagens no uso desse sistema, tais quais a distribuição de momentos, assim como o padrão de fissuração e deformação quando a laje é sobrecarregada. Além disso, também se verificou que a teoria das linhas de ruptura não é um método adequado para este tipo de estrutura pois superestima a resistência última da mesma.

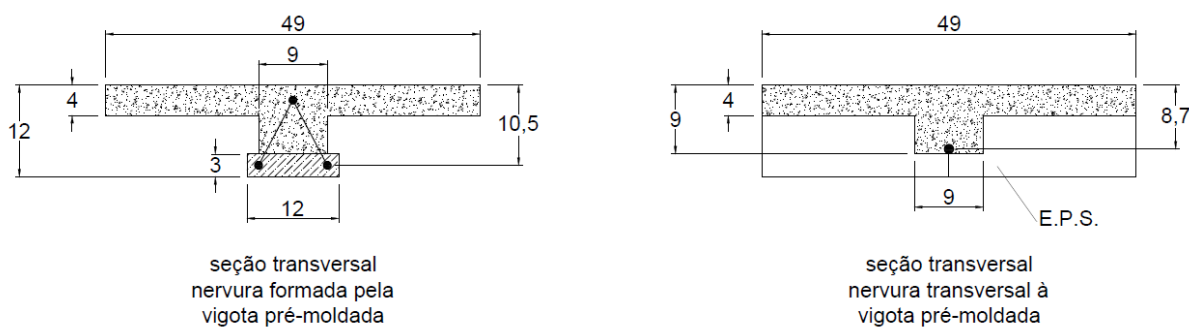
Droppa Jr. (1999) ensaiou uma laje bidirecional formada por vigotas treliçadas com peso próprio igual a $1,60 \text{ kN/m}^2$, com as dimensões mostradas nas figuras 26 e 27. O ensaio consistiu na leitura de deflectômetros a cada $0,5 \text{ kN/m}^2$ de carregamento e foi realizado em duas etapas, sendo que na primeira a laje foi carregada até a sobrecarga de projeto de 3 kN/m^2 e mantida por 24 horas com este carregamento e depois foi realizado o descarregamento. Na segunda etapa a laje foi carregada até 6 kN/m^2 com leituras durante o carregamento e descarregamento.

Figura 26 – Geometria da laje ensaiada por Droppa Jr.



Fonte: Droppa Jr. (1999).

Figura 27 – Seções transversais da laje ensaiada por Droppa Jr.

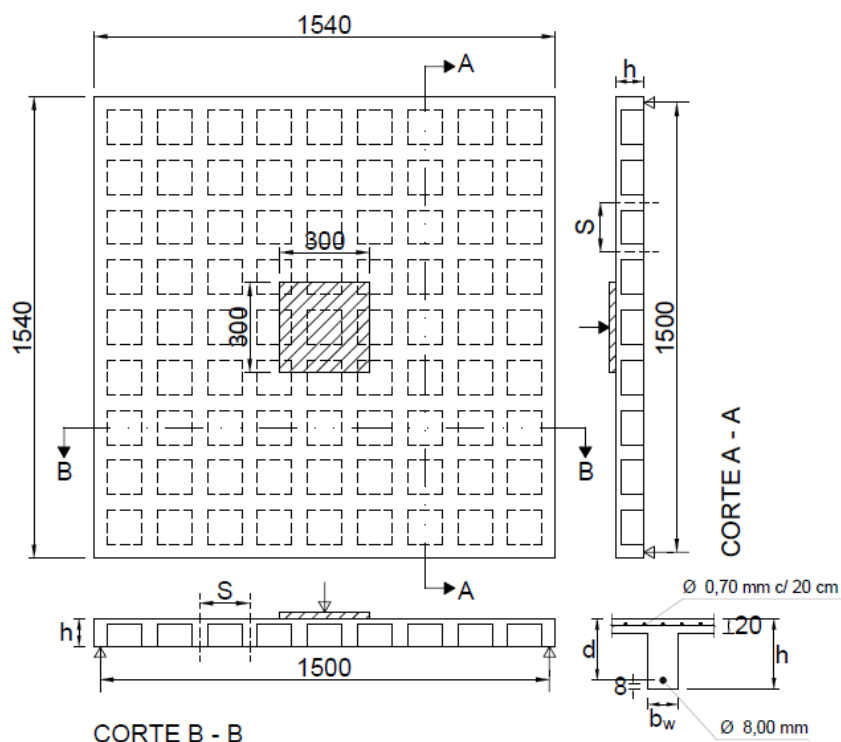


Fonte: Adaptado de Droppa Jr. (1999) pelo autor.

Droppa Jr. (1999) concluiu que há grande influência da rigidez à torção nos valores de deslocamentos e que a não consideração dessa característica subestima a capacidade resistente da laje, tanto em relação aos deslocamentos quanto aos esforços solicitantes.

Abdul-Wahab e Khalil (2000) ensaiaram oito lajes quadradas em escala 1:4, com 1540 mm de lado, alturas variáveis e submetidas a um carregamento centrado numa placa quadrada de 30 cm de lado, conforme é mostrado na figura 28.

Figura 28 – Detalhes das lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000)



Fonte: Adaptado de Abdul-Wahab e Khalil (2000) pelo autor.

Além disso, das oito lajes ensaiadas, seis eram nervuradas, de S1 a S6, e duas maciças, S7 e S8. A principal laje do estudo foi a S2, sendo que nas outras lajes nervuradas variou-se o espaçamento entre as nervuras, a larguras dessas, bem como a altura das lajes. A laje maciça S7 possui altura equivalente a S2 enquanto a S8 possui altura igual a S2. As características das lajes são mostradas na tabela 6.

Tabela 6 – Características das lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil

Laje	Vazios	S (mm)	Mesa (mm)	b_w (mm)	h (mm)
S1	11 x 11	136	20	52	95
S2	9 x 9	167	20	52	95
S3	7 x 7	214	20	52	95
S4	5 x 5	300	20	52	95
S5	9 x 9	167	20	52	125
S6	9 x 9	167	20	57	65
S7	Maciça	—	—	—	75
S8	Maciça	—	—	—	95

Fonte: Adaptado de Abdul-Wahab e Khalil (2000) pelo autor.

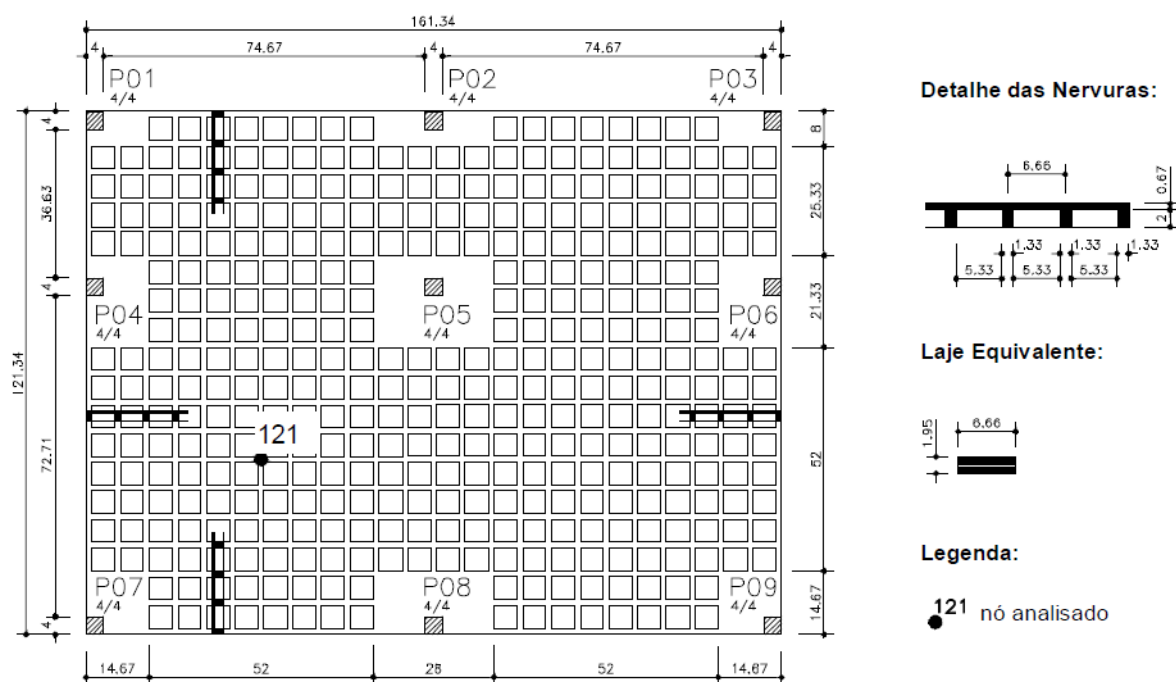
Além do estudo experimental, os autores apresentam um estudo teórico, por analogia de placa, no qual a rigidez muda do concreto não fissurado para o fissurado, e compararam os resultados experimentais com o método da espessura equivalente, o método do módulo de elasticidade efetivo e com o método exato, no qual é considerado a rigidez à torção.

Segundo os autores, os métodos para o cálculo da exata rigidez à torção, apesar de serem complicados, proporcionam boas previsões do comportamento em relação aos testes. Contudo, não considerar a rigidez à torção tanto em lajes nervuradas como em lajes maciças subestimam a capacidade dessas, proporcionando resultados conservadores, assim como considerar toda a rigidez em lajes nervuradas superestima a rigidez dessas na fase elástica.

Ademais, segundo Abdul-Wahab e Khalil (2000), o método da espessura equivalente superestima a rigidez à torção na fase elástica não fissurada e principalmente na fase elástica fissurada. Os autores recomendam utilizar na fase elástica fissurada uma redução de 25 % da rigidez na fase elástica.

Oliveira et al (2000) realizaram uma análise elástica linear (em modelos de grelha e de laje equivalente) e não linear de uma laje nervurada em escala 1:1,75 ensaiada por Klein e Selistre em 1997, cuja geometria é mostrada na figura 29.

Figura 29 – Geometria da laje ensaiada por Klein e Selistre em 1997



Fonte: Oliveira et al (2000).

O pavimento em laje nervurada foi submetido a um carregamento uniformemente distribuído de até 7,5 kN/m² (incluindo o peso próprio) aplicado em 5 incrementos, sendo o primeiro correspondente a 1/3 da carga total e os demais de 1/6 cada um. Ademais, todas as análises realizadas por Oliveira et al (2000) foram no nó 121 do pavimento.

Na análise linear através do modelo de grelha, as nervuras foram substituídas por elementos de barra e os capiteis por elementos de placa, além disso, também foram consideradas duas hipóteses para a rigidez à torção: considerando toda a rigidez à torção dos elementos estruturais calculada no Estádio I; considerando apenas 1% da rigidez à torção calculada no Estádio I. Na análise linear através da laje equivalente, os autores determinaram a espessura do elemento de placa através da equivalência de rigidez à flexão das nervuras. Além disso, foi considerada duas hipóteses para a rigidez à torção, da mesma forma que o modelo de grelha.

Nas análises não lineares do pavimento foram utilizados os seguintes modelos:

- a) modelo pela formulação empírica proposta por Branson: considera-se uma redução progressiva do momento de inércia médio de acordo com o valor do momento fletor atuante. Esse modelo é implementado na teoria de grelhas, onde o momento fletor atuante nos dois nós de cada elemento de barra é comparado ao respectivo momento de fissuração, o qual quando superado, impõe uma correção ao momento de inércia do elemento;
- b) modelo não linear simplificado: proposto por Oliveira em 1997, no qual adota-se uma relação constitutiva entre o momento fletor e a curvatura trilinear para o concreto através dos limites dos Estádios I, II e III para a caracterização dos patamares de rigidez e parâmetros de encruamento da seção transversal do concreto armado. Na laje adota-se o critério de escoamento de von Mises bidimensional e um critério uniaxial para os elementos de barra. Os autores consideraram as nervuras e a largura colaborante da mesa como elementos de barra e os capitéis como elemento de placa.

Oliveira et al (2000) concluíram que os deslocamentos obtidos através dos modelos não lineares ficaram mais próximos dos resultados do ensaio do que os obtidos pelos modelos lineares. Além disso, apesar dos modelos não lineares utilizados apresentarem resultados suficientemente precisos em condições de serviço, os mesmos não são capazes de exprimir com fidelidade o comportamento do pavimento próximo à ruptura.

Selistre (2000) realizou um estudo teórico experimental de um pavimento com lajes nervuradas bidirecionais, em modelo reduzido, na escala 1:7,5, construída em microconcreto armado. O pavimento foi apoiado em seis pilares metálicos e o carregamento aplicado (de até 8,00 kN/m²) foi de curta duração na primeira etapa e de longa duração na segunda. A análise numérica realizada pelo autor constitui em um modelo em elementos finitos de placas com seção retangular de inércia equivalente a nervurada através do software SAP90 e através do modelo de uma grelha de vigas “T” através do software GRELHA-TQS.

Através dos resultados, Selistre (2000) concluiu que o método de cálculo que melhor simulou o comportamento da estrutura na fase elástica-linear foi o de elementos finitos de placas e à medida que houve a evolução das fissuras da laje o comportamento se aproximou do modelo de grelha, contudo, nos últimos estágios de carga nenhum dos dois métodos numéricos conseguiu reproduzir o comportamento da estrutura.

Silva Filho, Lopes e Soares (2002) ensaiaram cinco lajes nervuradas unidirecionais compostas de vigotas de concreto armado e tabelas cerâmicas solidarizadas por uma capa de concreto submetidas a um carregamento distribuído. Os resultados mostraram uma capacidade de carga real bem superior à capacidade de carga de projeto a qual segundo os autores deve-se principalmente à contribuição à rigidez global proporcionada pelos elementos cerâmicos de enchimento. As características das lajes são mostradas na tabela 7.

Tabela 7 – Características das lajes ensaiadas por Silva Filho et al (2002)

Laje	LC3A	LC4A	LC5A	LT5A	LC3B
Vão livre (m)	2,80	3,80	4,80	4,80	2,80
Largura (cm)	2,06	1,83	1,92	1,88	2,07
b _f (cm)	33	34	36	44	33
b _w (cm)	4	5	7	9	4
h (cm)	12	12	12	16	12
h _f (cm)	4	4	4	4	4
A _s	2 Φ 5 mm	2 Φ 6 mm	3 Φ 6 mm	2 Φ 5 mm + 2 Φ 6 mm	2 Φ 5 mm
A _{s, dist}	Φ 4,2 c/ 20	Φ 4,2 c/ 20	Φ 4,2 c/ 20	Φ 4,2 c/ 20	Φ 4,2 c/ 20

Fonte: Silva Filho et al (2002).

Araújo (2003) apresentou um modelo não-linear para a análise de lajes de concreto armado considerando a não-linearidade física do concreto, assim como a colaboração do concreto tracionado entre fissuras e comparou a utilização desse método com ensaios de seis lajes maciças e as seis lajes nervuradas ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000). O autor utilizou o método laminar, o qual divide a laje em diversas camadas de pequena espessura, para a análise das lajes nervuradas utilizando-se de propriedades equivalentes do concreto de forma a considerar o vazio entre as nervuras ou a contribuição do material de enchimento. A análise estrutural foi realizada utilizando-se o método dos elementos finitos e um algoritmo iterativo foi empregado para a solução do sistema de equações. Os resultados mostraram uma boa concordância entre as respostas teóricas e os resultados experimentais.

Dias (2003), através do software ANSYS 5.5, estudou a excentricidade entre os eixos das nervuras e o plano médio da capa em lajes nervuradas, bem como os efeitos nas solicitações dos enrijecedores. O autor aplicou na sua pesquisa os seguintes modelos:

- a) Modelo 01: as nervuras são discretizadas com seção retangular concretica ao plano médio da placa, utilizando-se o elemento BEAM4, o qual possui seis graus de liberdade por nó. A laje é discretizada pelo elemento de casca SHELL63, o qual possui quatro nós, sendo seis graus de liberdade por nó;
- b) Modelo 02: as nervuras são discretizadas com seção retangular concretica ao plano médio da placa, utilizando-se o elemento BEAM4, o qual possui seis graus de liberdade por nó, contudo, nesse modelo supõe a excentricidade existente entre a nervura e o plano médio da placa através da consideração da altura da viga até a face superior da placa. A laje é discretizada pelo elemento de casca SHELL63, o qual possui quatro nós, sendo seis graus de liberdade por nó;
- c) Modelo 03: as nervuras são discretizadas com seção retangular concretica ao plano médio da placa, utilizando-se o elemento BEAM4, o qual possui seis graus de liberdade por nó, contudo, nesse modelo supõe a excentricidade existente entre a nervura e o plano médio da placa através da consideração da altura da viga até a face inferior da placa. A laje é discretizada pelo elemento de casca SHELL63, o qual possui quatro nós, sendo seis graus de liberdade por nó;

- d) Modelo 04: as nervuras, bem como as lajes são discretizadas pelo elemento de casca SHELL63, o qual possui quatro nós, sendo seis graus de liberdade por nó;
- e) Modelo 05: as nervuras são discretizadas com o elemento BEAM4 com seção transversal tipo “T”, considerando-se a colaboração da laje na rigidez das vigas, aplicado de forma concentrica ao plano médio da placa. A laje é discretizada pelo elemento de casca SHELL63, o qual possui quatro nós, sendo seis graus de liberdade por nó;
- f) Modelo 06: modelo onde a laje nervurada é representado pela grelha de nervuras discretizadas pelo elemento BEAM4 com seção transversal “T”, considerando-se a colaboração da laje na rigidez das vigas;
- g) Modelo 07: a laje nervurada é transformada em uma laje maciça com espessura equivalente em inércia à flexão. A laje é discretizada pelo elemento de casca SHELL63, o qual possui quatro nós, sendo seis graus de liberdade por nó;
- h) Modelo 08: a laje nervurada é transformada em uma laje maciça com espessura equivalente em inércia à flexão, a qual tem sua espessura diminuída em 20%, conforme proposta de Abdul-Wahab e Khalil (2000). A laje é discretizada pelo elemento de casca SHELL63, o qual possui quatro nós, sendo seis graus de liberdade por nó.

Dias (2003) concluiu que sempre é necessário ao modelar lajes nervuradas considerar a excentricidade, seja por modelos realistas ou por modelos simplificados. Além disso, segundo o autor, quando se trabalha com modelos tridimensionais deve-se verificar as peças quanto aos esforços de flexo compressão ou flexo-tração.

Dutra (2005) confeccionou três modelos iguais de lajes cogumelo nervuradas, em escala reduzida, com uma geometria conforme mostra a figura 30 e 31, no intuito de coletar deformações e flechas até a carga de 5 kN/m² à qual a laje foi projetada. No entanto as lajes 01 e 02 foram submetidas até um carga de 11 kN/m² e a laje 3 até 13 kN/m², sendo que com estes carregamentos, nenhuma laje chegou à ruptura. Dessa forma, o autor realizou um ensaio complementar, levando a laje 02 ao carregamento de 22 kN/m², onde verificou-se o aparecimento de fissuras que indicavam o rompimento à flexão no vão maior da estrutura. O autor também realizou a análise numérica através do método dos pórticos equivalentes, pelo software CYPECAD e por meio do método dos elementos finitos utilizando dois modelos

Dutra (2005) concluiu que o método dos pórticos equivalentes apresentou muitas discrepâncias para o caso analisado, bem como o uso do método dos elementos finitos pelo CYPECAD e ANSYS não conseguiram satisfazer satisfatoriamente os resultados reais da estrutura. O autor ainda ressalta que o método de cálculo que mais se aproximou dos resultados reais foi o modelo 02, simulado pelo método dos elementos finitos com o software ANSYS, onde considerou-se os pilares e a estrutura como um conjunto.

Schwetz (2005) apresenta um modelo reduzido de laje nervurada construído em escala 1:7,5, utilizando microconcreto e arame galvanizado, submetida a carregamentos lineares e uniformemente distribuído. A autora confrontou os resultados experimentais com a análise matricial de grelhas através do Sistema Computacional TQS e concluiu que o modelo experimental apresentou um comportamento mais rígido que o teórico.

Donin (2007) simulou quatro lajes nervuradas (S1 a S4) ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000) por um modelo tridimensional empregando o elemento SOLID45, o qual possui oito nós, com três graus de liberdade em cada nó e translações nodais nas direções x, y e z, bem como dois modelos bidimensionais com o elemento de casca SHELL63, considerando o método de cálculo da altura equivalente em função da equivalência de momento de inércia no primeiro modelo e considerando o método de cálculo da altura equivalente em função da rigidez média da laje no segundo modelo. O autor concluiu que a utilização de elementos finitos tridimensionais apresenta resultados mais confiáveis no cálculo de lajes nervuradas do que os métodos de modelagem por meio de seção equivalente e por elementos de placa.

Além disso, Donin (2007) também simulou as lajes cogumelo nervuradas experimentadas por Dutra (2005), utilizando três modelos em elementos finitos bidimensionais (MEF-01, MEF-02 e MEF-03) e dois tridimensionais (MEF-04 e MEF-05). Nos modelos bidimensionais os pilares foram discretizados com o elemento SOLID45 e a laje com o elemento de casca SHELL63, onde a altura nas regiões das nervuras foram calculadas através do método da equivalência de momento de inércia nos dois primeiros modelos enquanto no terceiro foi calculada pelo método da rigidez média. Nos modelos tridimensionais tanto a laje bem como os pilares foram discretizados com o elemento SOLID45. A principal diferença dos modelos encontra-se no módulo de deformação longitudinal secante, o qual foi utilizado o obtido nos

ensaios do microconcreto para os modelos MEF-01 e MEF-04 enquanto nos modelos MEF-02, MEF-03 e MEF-05 foi utilizado o calculado de acordo com CEB-FIP 90.

Através da análise dos resultados, Donin (2007) concluiu que os modelos em elementos finitos tridimensionais propostos apresentam ganhos pouco significativos na determinação dos deslocamentos, contudo, em relação aos momentos fletores, esses modelos mostraram-se muito superiores aos modelos bidimensionais e de pórticos equivalentes. Além disso, o método da rigidez média não apresenta melhora significativa no cálculo de deslocamentos das lajes cogumelo nervuradas em relação ao método da equivalência de momento de inércia.

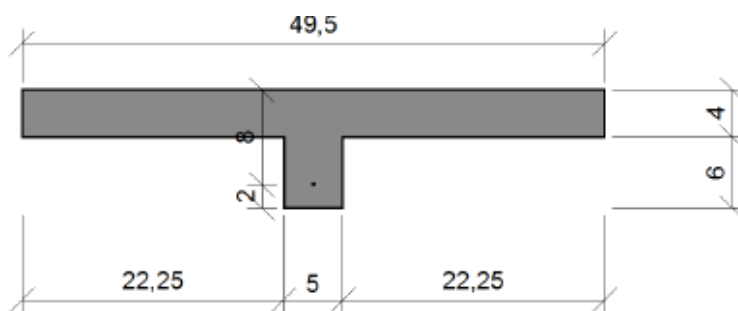
Schwetz (2011) instrumentou três lajes nervuradas em escala natural e um modelo reduzido de microconcreto armado na escala 1:7,5. Além disso, a autora realizou análises lineares e não lineares através do Sistema Computacional TQS e o software SAP2000 concluindo que o comportamento numérico foi semelhante ao experimental.

Cunha (2012) realizou um estudo teórico-experimental, no qual ensaiou uma laje nervurada quadrada de três metros de lado e sua laje maciça equivalente. Além disso, o autor comparou os resultados experimentais com resultados os teóricos e concluiu que os processos simplificados podem ser aplicados na análise de lajes nervuradas.

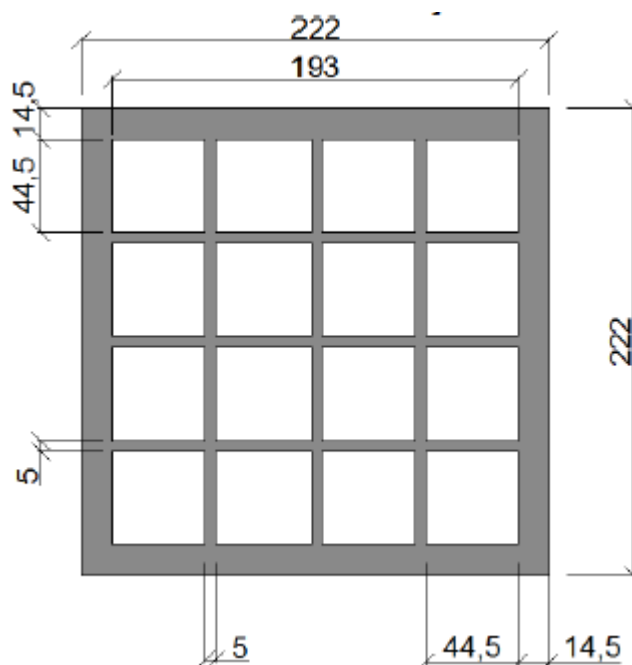
Recalde (2014) realizou a análise numérica à flexão das lajes S2, S5 e S6 ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000), da laje ensaiada por Borges, em 2009, bem como as lajes nervuradas em escala real instrumentadas por Schwetz (2011). O autor considerou a não linearidade através do uso de propriedades mecânicas do aço e do concreto em compressão com o uso de modelos constitutivos realísticos e um modelo constitutivo de fissuração distribuída proposto por D'Avilla (2003) para o concreto em tração.

Recalde (2014) concluiu que o modelo numérico proposto possui um bom desempenho, além de ter a vantagem de permitir o uso de diferentes parâmetros para cada elemento de concreto, onde há diferenças na seção ou na taxa de armadura.

Bastos (2016), realizou um estudo teórico e experimental no seu trabalho de conclusão de curso, no qual ensaiou uma laje nervurada bidirecional em escala real toda apoiada sobre vigas de concreto armado. A geometria da laje ensaiada pode ser visualizada nas figuras 32 e 33.

Figura 32 – Dimensões das nervuradas (cm)

Fonte: Bastos (2016).

Figura 33 – Dimensões da laje nervurada (cm)

Fonte: Bastos (2016).

Bastos (2016) comparou os resultados experimentais com os resultados teóricos calculados pela NBR 6118:2014 e concluiu que o processo de cálculo presente na norma é bastante conservador e a favor da segurança, o que segundo o autor, demonstra a necessidade de cálculos mais eficientes.

3 METODOLOGIA

Foram realizadas análises numéricas de lajes nervuradas de concreto armado de forma a comparar os resultados experimentais com os resultados numéricos. As lajes modeladas consistiram em quatro das seis lajes nervuradas ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000) e a laje nervurada ensaiada por Bastos (2016). Na análise numérica realizada em elementos finitos foram incorporados modelos constitutivos com critérios de ruptura dos materiais. Para realizar a comparação dos resultados numéricos com os experimentais, adotou-se nas duas aplicações uma relação de 60% entre a carga no ELU e a carga de ruptura estimada, e uma relação de 50% entre a carga no ELS e a carga no ELU. Essas relações foram obtidas avaliando as cargas de ruptura e projeto da laje nervuradas ensaiada por Bastos (2016), considerando para a determinação da carga relativa ao ELS uma carga devido ao uso de 2 kN/m² e um fator de redução de combinação quase permanente (ψ_2) de 0,30.

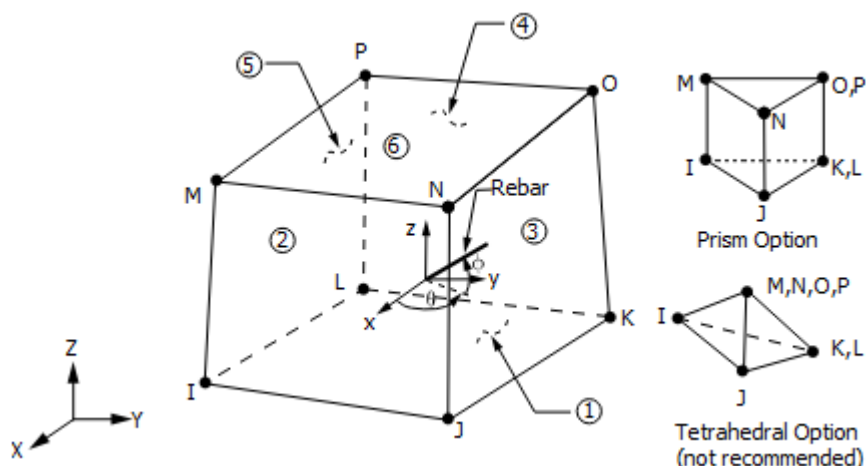
3.1 Modelo de cálculo em elementos finitos

As análises numéricas deste trabalho foram realizadas através do *software* ANSYS 16.1 Versão Acadêmica por meio da interface gráfica do usuário ou GUI (Graphical User Interface).

3.1.1 Características constitutivas

O elemento escolhido para a simulação das lajes foi o SOLID65, o qual possui oito nós liberdade, cada qual com 3 graus de liberdade: translação em x, y e z. Esse elemento é capaz de representar fissuras (em três direções), esmagamento do concreto, bem como deformação plástica e fluência. Os nós e a geometria é mostrada na figura 34.

Figura 34 – Elemento Solid65



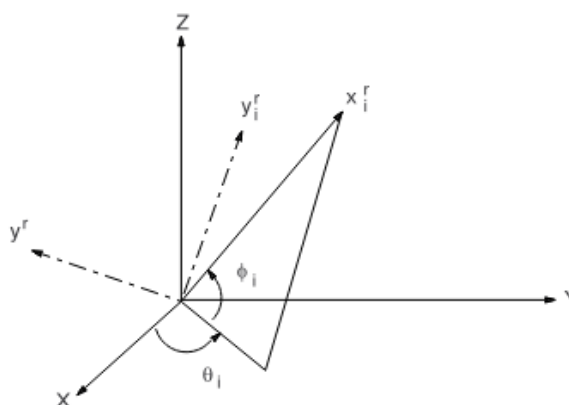
Fonte: ANSYS 16.1 *Reference Manual* (2015).

Quando o concreto fissura, a matriz de rigidez do elemento na direção normal à face da fissura é modificada. Além disso, um coeficiente de transmissão de esforço cortante é introduzido, o qual representa um fator de diminuição da resistência ao cisalhamento.

Contudo, se essa fissura fechar, então toda a tensão de compressão na face da mesma é transmitida através fissura e somente um coeficiente de diminuição da resistência ao cisalhamento de fissura fechada é introduzido.

Ademais, o SOLID65 permite a incorporação de barras de reforço de forma distribuída, orientadas pelos ângulos θ e ϕ (figura 35), definidas pelo usuário, com capacidade de resistir apenas a esforços axiais e incorporar deformações plásticas e lentas.

Figura 35 – Orientação da armadura



Fonte: ANSYS 16.1 *Reference Manual* (2015).

3.1.1.1 Concreto

Para a modelagem no programa ANSYS foram associados o material do tipo isotrópico linear, no qual são definidos o coeficiente de Poisson, adotado como 0,2, bem como o módulo de elasticidade inicial.

Além disso, foi adicionado o modelo multilinear elástico (MELAS), no qual a informação de entrada é a curva de tensão, a qual foi calculada conforme a NBR 6118:2014 a cada 0,25‰ acréscimo de deformação, sem o uso dos coeficientes de minoração de resistência do concreto.

Além disso, adicionou-se também o material *concrete* disponível no ANSYS, o qual é um modelo constitutivo para o concreto, proposto por Willam e Warnke (1974), o qual necessita para implementação no software a adição de nove constantes, conforme mostra a tabela 8.

Tabela 8 – Constantes do material *Concrete* no ANSYS

	Constantes	Valor adotado
1	Coeficiente de transmissão de esforço cortante para fissuras abertas;	0,2
2	Coeficiente de transmissão de esforço cortante para fissuras fechadas;	0,4
3	Tensão limite à tração (f_t);	Calculado
4	Tensão limite uniaxial à compressão (f_c);	-1
5	Tensão limite biaxial à compressão (f_{cb});	-
6	Estado de tensões hidrostático (σ_h^a);	-
7	Tensão limite biaxial à compressão no estado de tensões hidrostático (f_1);	-
8	Tensão limite uniaxial à compressão no estado de tensões hidrostático (f_2);	-
9	Perda de rigidez após a fissuração.	-

Fonte: Do autor.

A tensão limite à tração adotada foi a resistência característica inferior à tração do concreto, a qual foi calculada para cada caso, conforme a NBR 6118:2014 (equação 3), enquanto a tensão limite uniaxial à compressão foi suprimida através da adição do valor -1, de forma a evitar problemas de convergência, conseqüentemente, os outros valores relacionados à compressão (constante 5 à 8) também foram

suprimidos pelo programa. Além disso, deixou-se em branco o coeficiente de perda de rigidez após a fissuração pois não foi utilizada na programação do elemento SOLID65 essa simplificação, o qual tem função de ajudar na convergência.

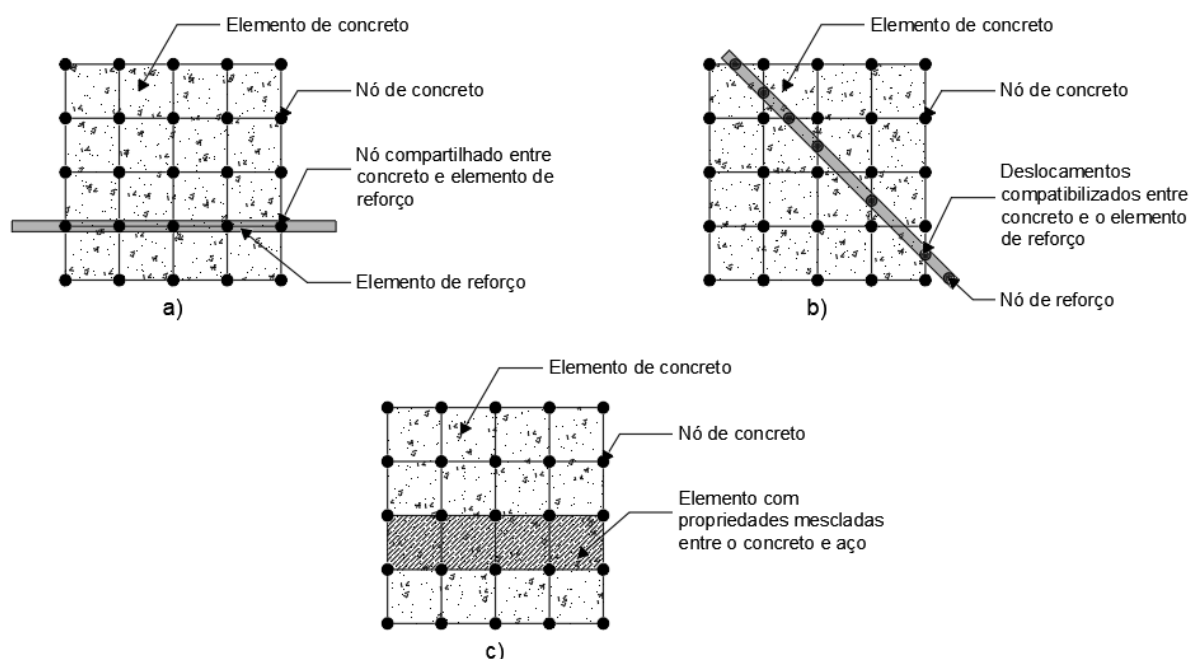
3.1.1.2 Aço

Para a modelagem do aço no programa ANSYS foram associados o material do tipo isotrópico linear, no qual é definido o coeficiente de Poisson, adotado como 0,3, e o módulo de elasticidade do aço, adotado como 210 GPa, conforme a NBR 6118:2014. Também foi adicionado para o aço um material elastoplástico bilinear, o qual usa o critério de escoamento de Von Mises. Nesse modelo de material, foi adicionado a tensão do escoamento do aço utilizado nos ensaios experimentais e adotado a tangente igual à 1.

Além disso, a modelagem do aço pode ser realizada das seguintes formas:

- a) Armadura discreta (figura 36a): a armadura usa elementos de barra que compartilham os mesmos nós do concreto, ficando o reforço condicionado à malha dos elementos de concreto;
- b) Armadura incorporado (figura 36b): as barras são posicionadas em qualquer local e é realizada uma compatibilização entre os deslocamentos entre o concreto e o reforço. Esse modelo é o mais realista, porém é o mais complicado de aplicar;
- c) Armadura distribuída (figura 36c): cada elemento finito é armado uniformemente. É o modelo mais fácil de ser incorporado, contudo apresenta a menor precisão.

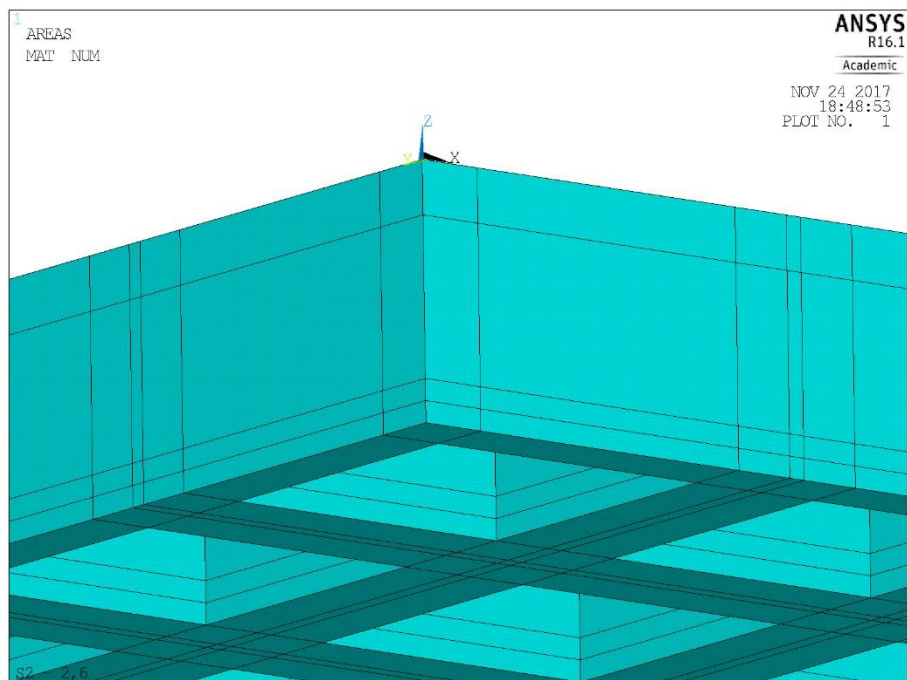
Figura 36 – Tipos de discretização das armaduras



Fonte: Elaborado pelo autor.

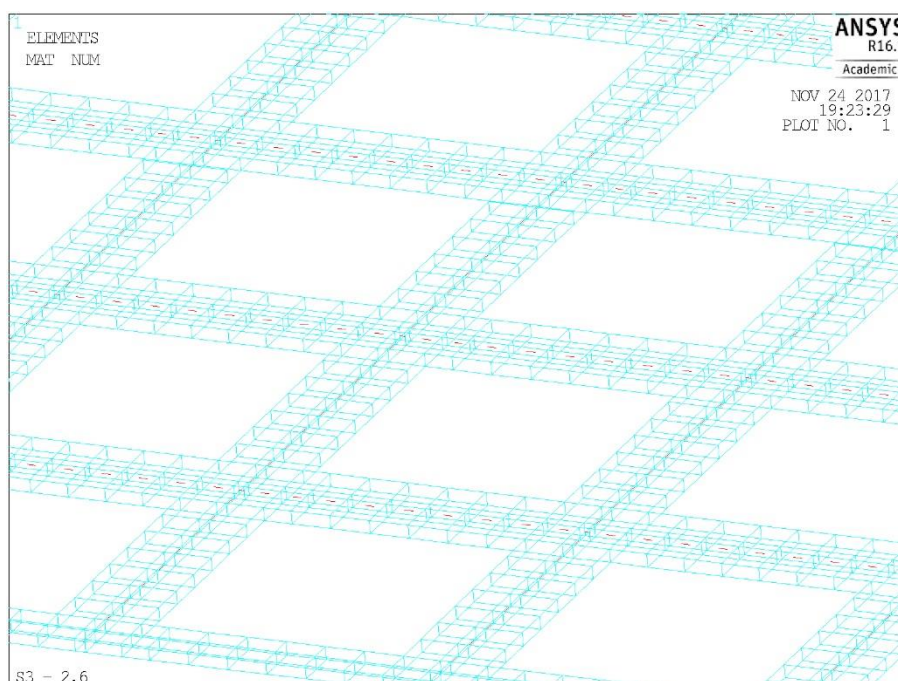
Neste trabalho as armaduras foram discretizadas de forma distribuída, pois esse tipo de discretização apresenta simplicidade na sua aplicação, apesar de não apresentar tanta precisão quanto a armadura discreta e principalmente quanto à armadura incorporada.

De forma a melhorar a precisão dos resultados, na modelagem da geometria criou-se volumes com mesma área das barras de aço utilizado nos ensaios experimentais. Na figura 37 é possível visualizar os volumes criados para a inserção das taxas de aço.

Figura 37 – Detalhes dos volumes criados para a inserção das taxas de aço

Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

Além disso, o ANSYS permite, a partir de comandos especiais, a visualização das taxas de reforço aplicadas, as quais são apresentadas em vermelho, conforme mostra a figura 38.

Figura 38 – Visualização das armaduras no ANSYS

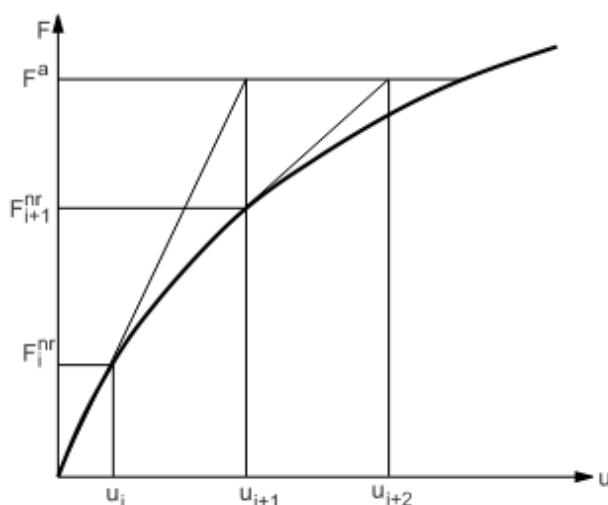
Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

3.1.2 Considerações referentes as análises não lineares

A consideração de não linearidades dos materiais numa aplicação do método dos elementos finitos na análise de estruturas resulta em um sistema de equações não lineares de equilíbrio, o qual necessita para a resolução a utilização de um método numérico.

Dentre os métodos disponíveis no ANSYS, o escolhido pelo autor foi o de Newton-Raphson completo, o qual é caracterizado pela atualização da matriz de rigidez a cada iteração. Neste método o problema não linear é compreendido como uma serie de aproximações lineares através de incrementos iterativos. Para cada uma dessas iterações é calculado incrementos de deslocamentos até o ponto onde os vetores de forças residuais sejam menores que o critério de convergência, conforme mostra a figura 39.

Figura 39 – Solução do Newton-Raphson



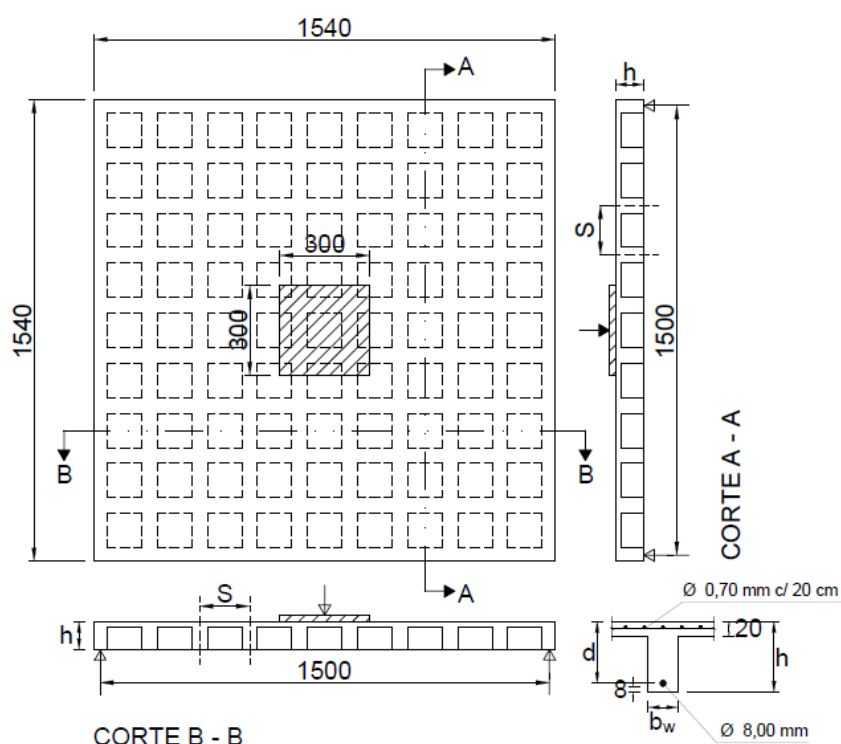
Fonte: ANSYS 16.1 *Reference Manual* (2015).

O critério de convergência adotado pelo autor foi o critério de deslocamentos na ordem de 0,05 com a norma L2. Além disso, em todas as análises adotou-se o número mínimo de 100 subpassos, com no máximo 200 passos de carga, com um número máximo de 100 iterações por passo de carga.

3.2 Aplicação 01 – Lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000)

Abdul-Wahab e Khalil (2000), realizaram ensaios de oito lajes, sendo duas maciças e seis nervuradas, as quais foram nomeadas pelos autores como S1, S2, S3 e S4, as quais foram objeto de estudo deste trabalho. A características gerais das lajes e do ensaio pode ser visualizada na figura 40, enquanto na tabela 9 pode ser visualizada as características geométricas.

Figura 40 – Características gerais das lajes ensaiadas



Fonte: Adaptado de Abdul-Wahab e Khalil (2000) pelo autor.

Tabela 9 – Características geométricas das lajes modeladas

Laje	Vazios	S (mm)	Mesa (mm)	b_w (mm)	h (mm)
S1	11 x 11	136	20	52	95
S2	9 x 9	167	20	52	95
S3	7 x 7	214	20	52	95
S4	5 x 5	300	20	52	95

Fonte: Adaptado de Abdul-Wahab e Khalil (2000) pelo autor.

O concreto utilizado foi dosado para que os corpos de provas cilíndricos obtivessem uma resistência média à compressão em torno de 30 MPa aos 28 dias.

Cada laje foi ensaiada no mesmo dia do corpo de prova cilíndrico, a partir dos quais foi calculado a tensão limite de tração (equação 3), conforme mostra a tabela 10.

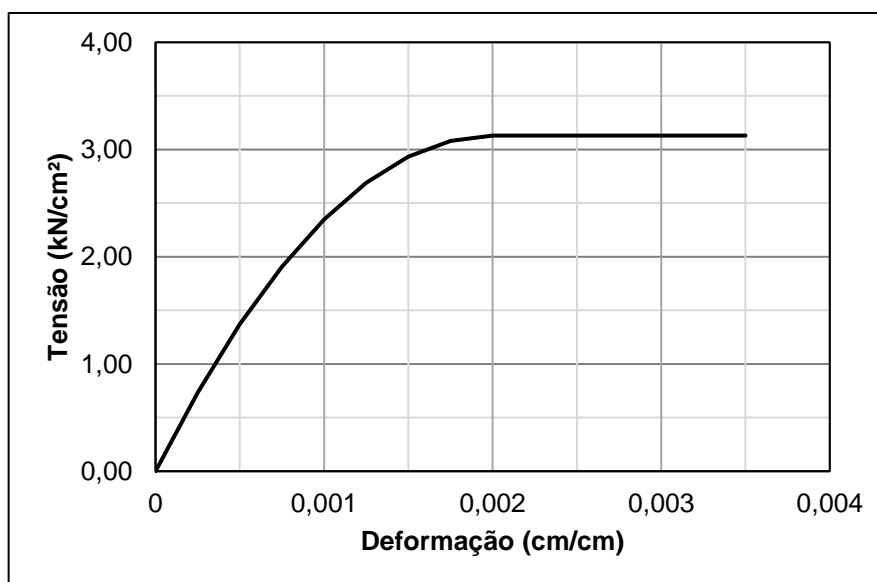
Tabela 10 – Valores de tensão limite de tração de acordo com a resistência média do concreto

Laje	f_{cm} (kN/cm ²)	f_{ct} (kN/cm ²)
S1	3,13	0,208
S2	3,20	0,212
S3	3,14	0,209
S4	2,89	0,198

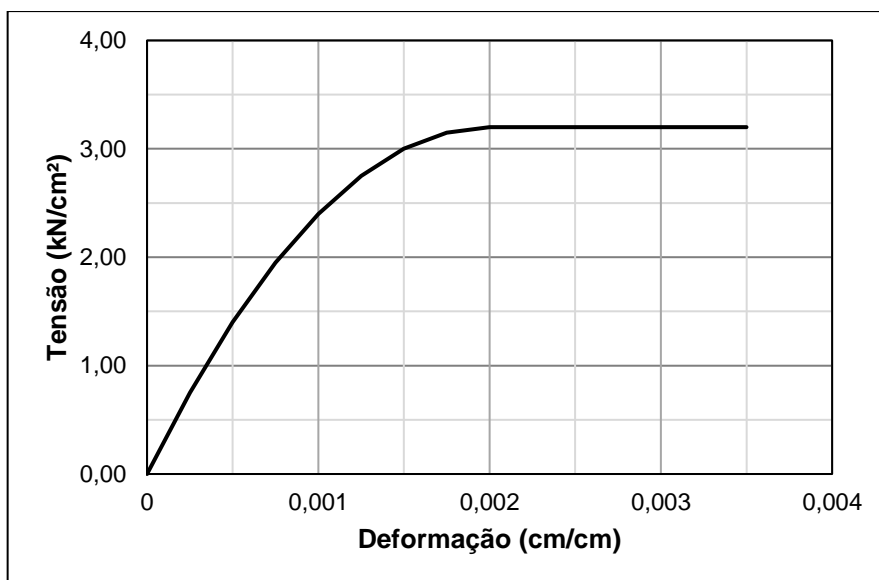
Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, a partir da resistência à compressão foram gerados os diagramas tensão-deformação idealizados conforme a NBR 6118:2014 (equação 49, sem os coeficientes de minoração da resistência), os quais foram utilizados nas análises não lineares. Os diagramas são apresentados da figura 41 à figura 44.

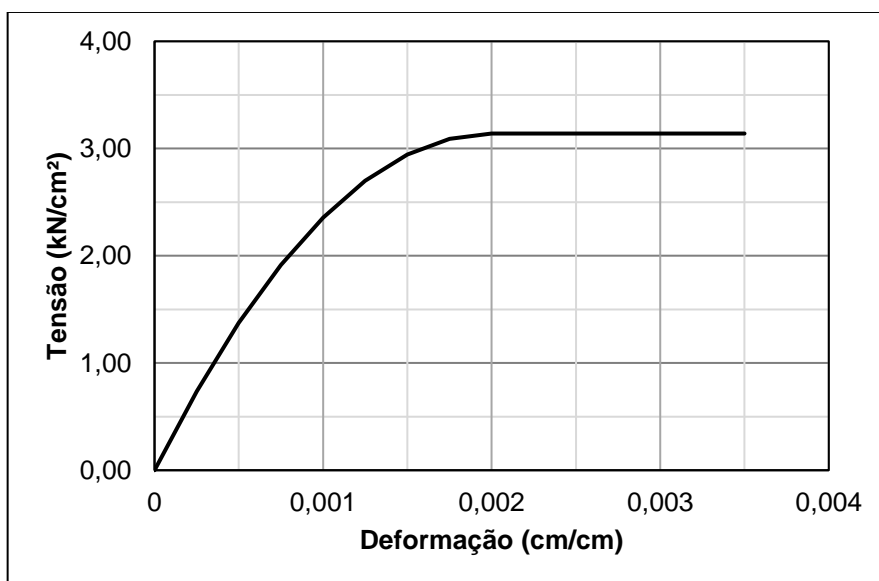
Figura 41 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje S1



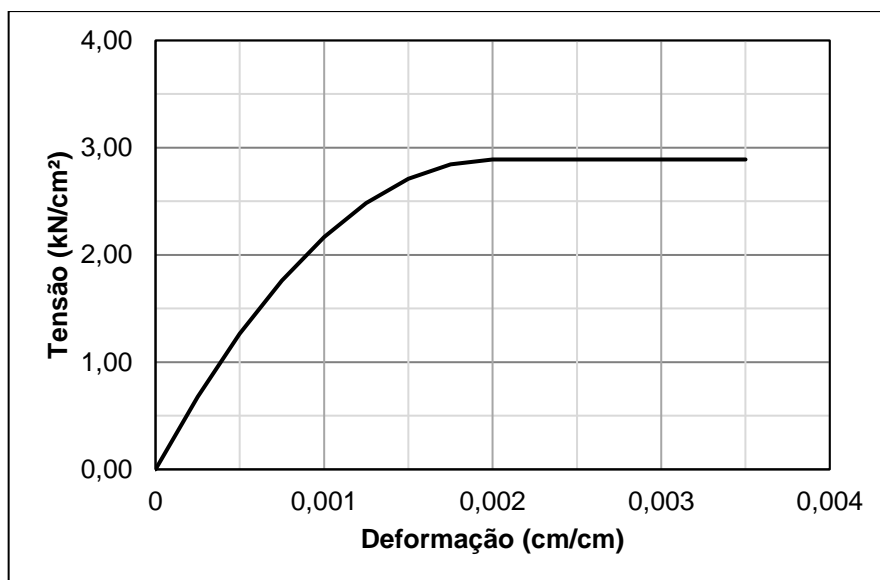
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje S2

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 43 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje S3

Fonte: Elaborado pelo autor.

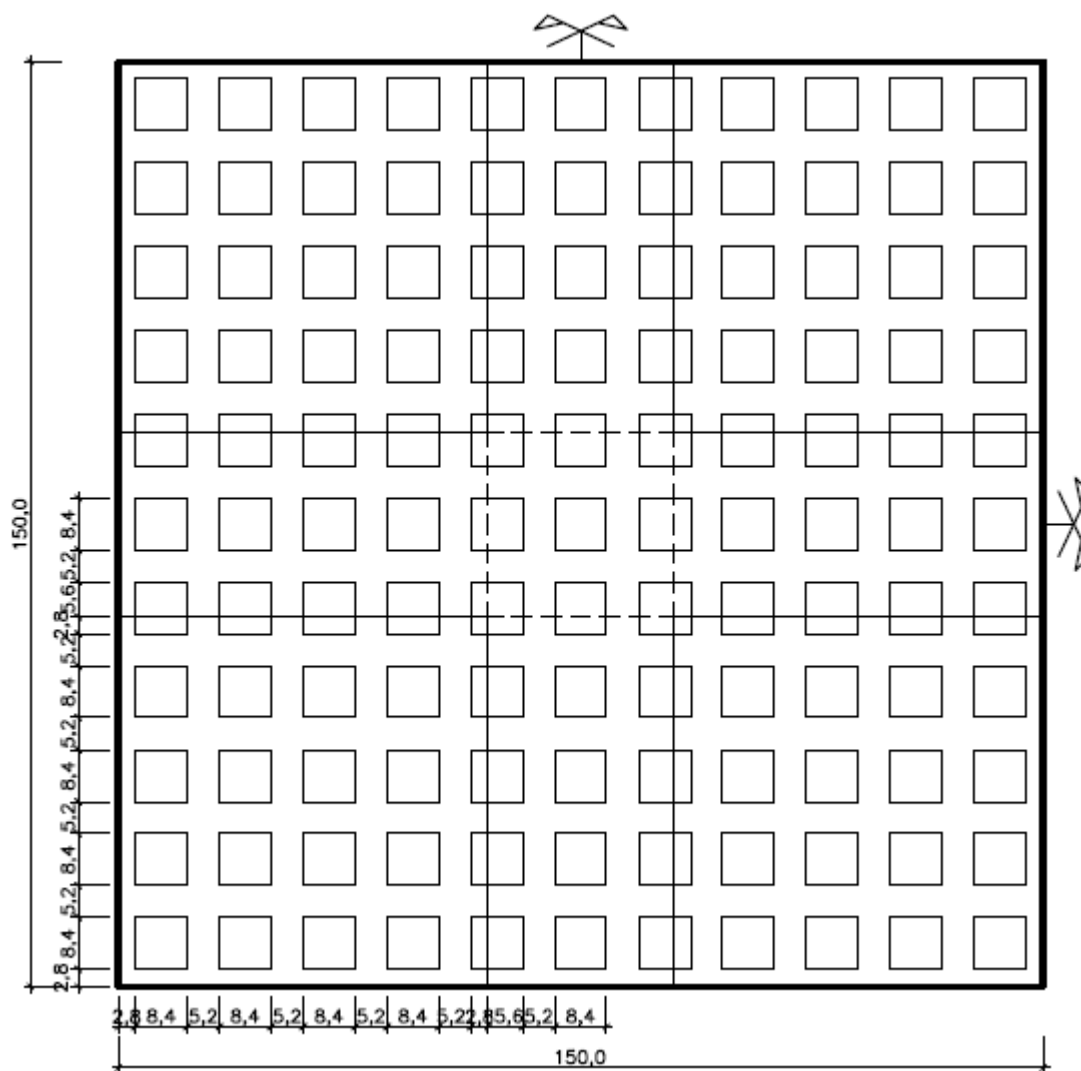
Figura 44 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje S4

Fonte: Elaborado pelo autor.

A lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000) eram quadradas, de vão teórico de 1,50 metros, as quais foram submetidas a uma força centrada aplicada numa placa metálica quadrada de lado de 30 cm.

A geometria das lajes pode ser vista nas figuras a seguir:

Figura 45 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje S1



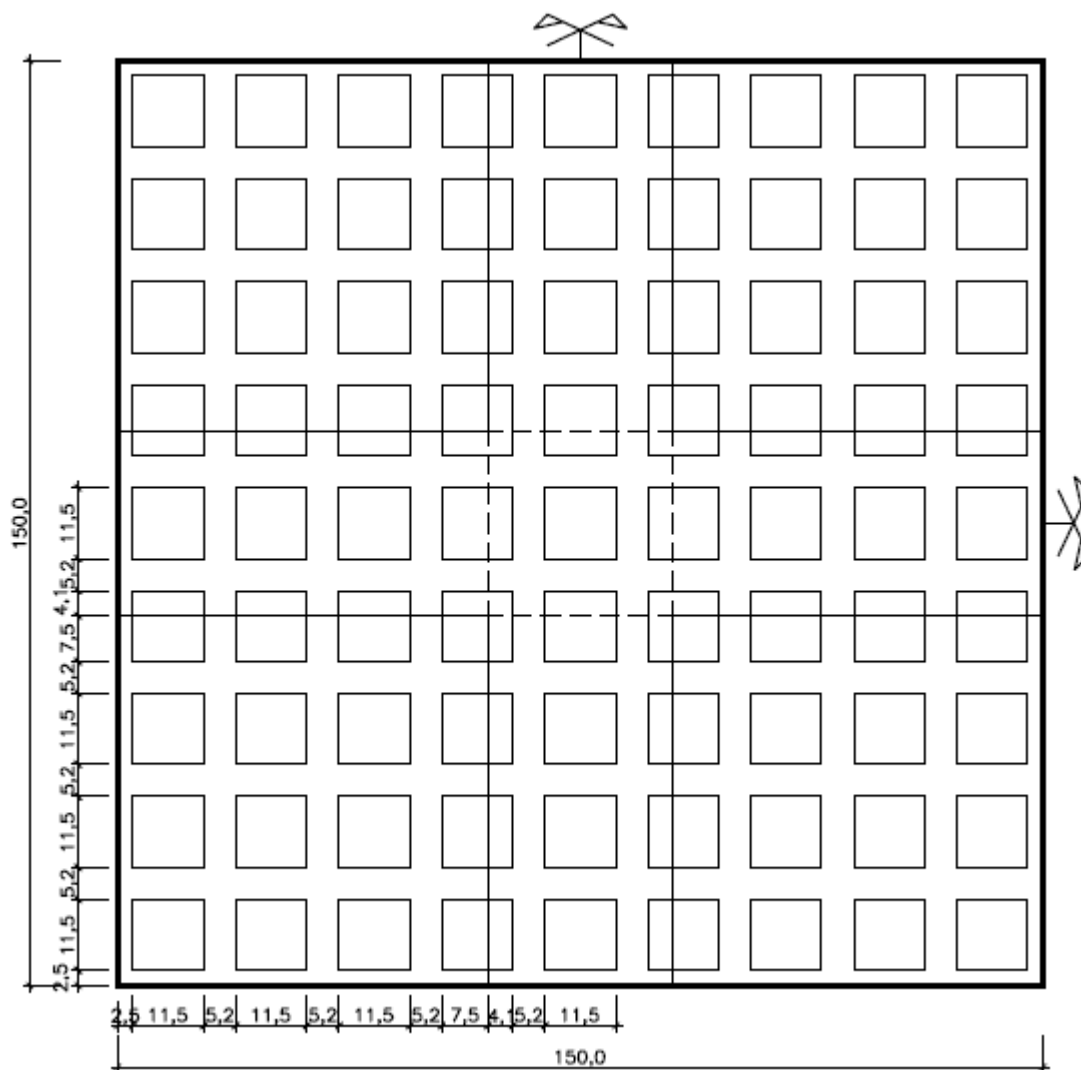
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Seção transversal em centímetros da geometria da laje S1



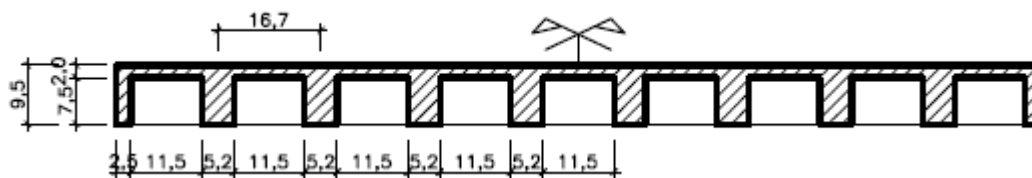
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 47 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje S2



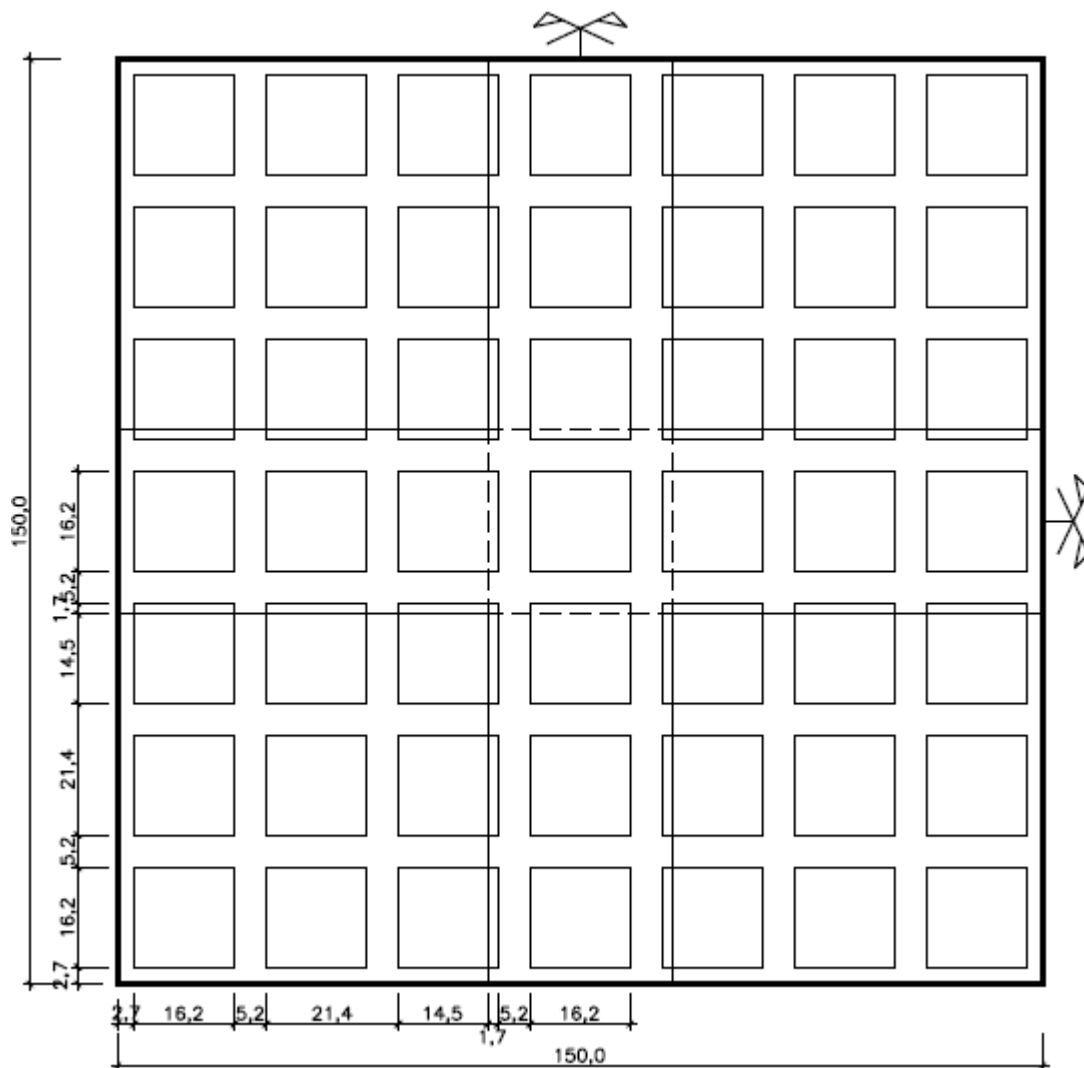
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 – Seção transversal em centímetros da geometria da laje S2



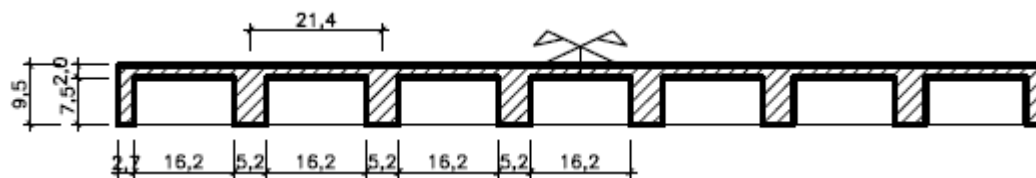
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 49 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje S3



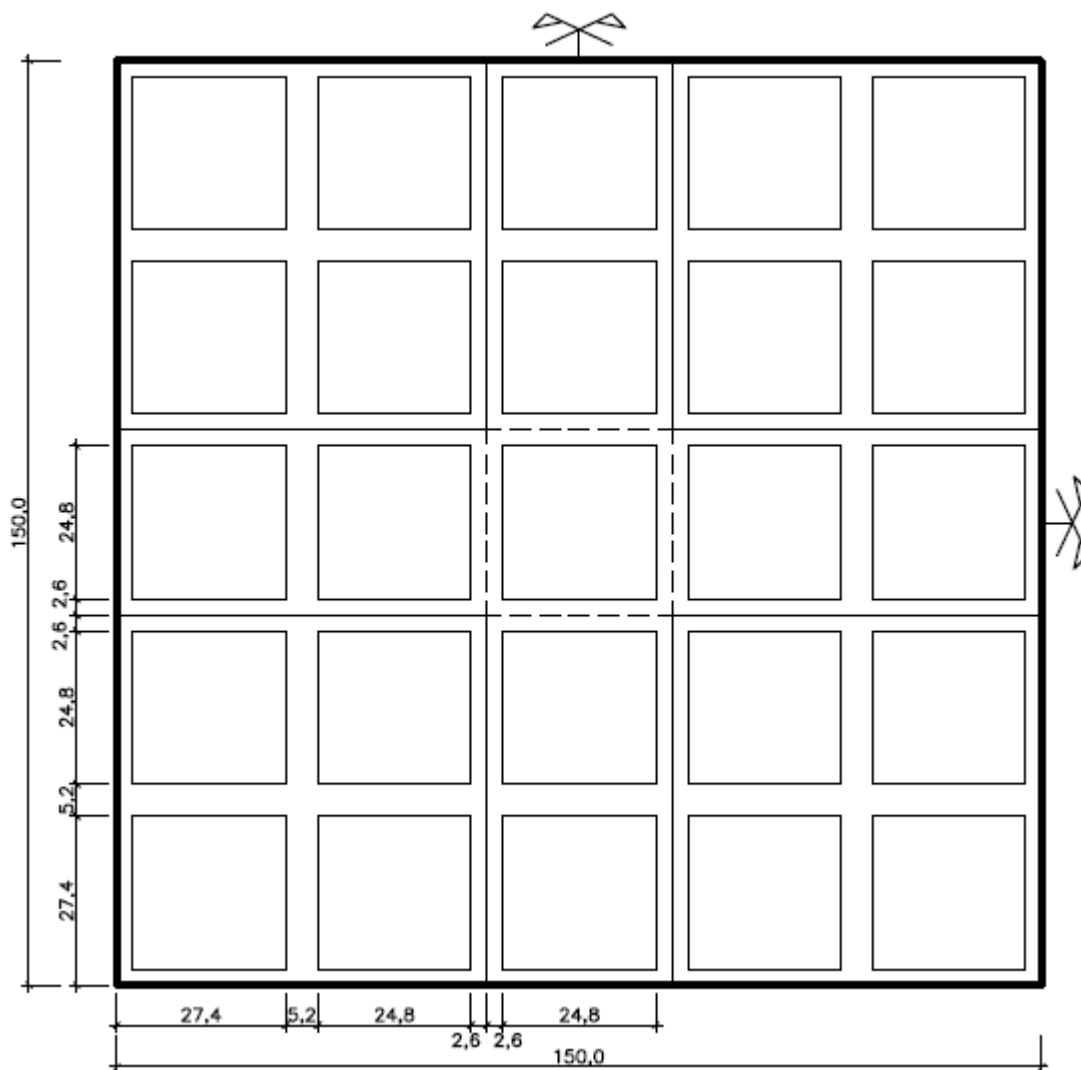
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 50 – Seção transversal em centímetros da geometria da laje S3



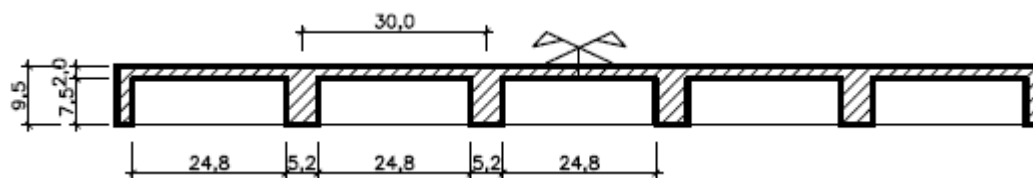
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 51 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje S4



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 52 – Seção transversal centímetros da geometria em da laje S4

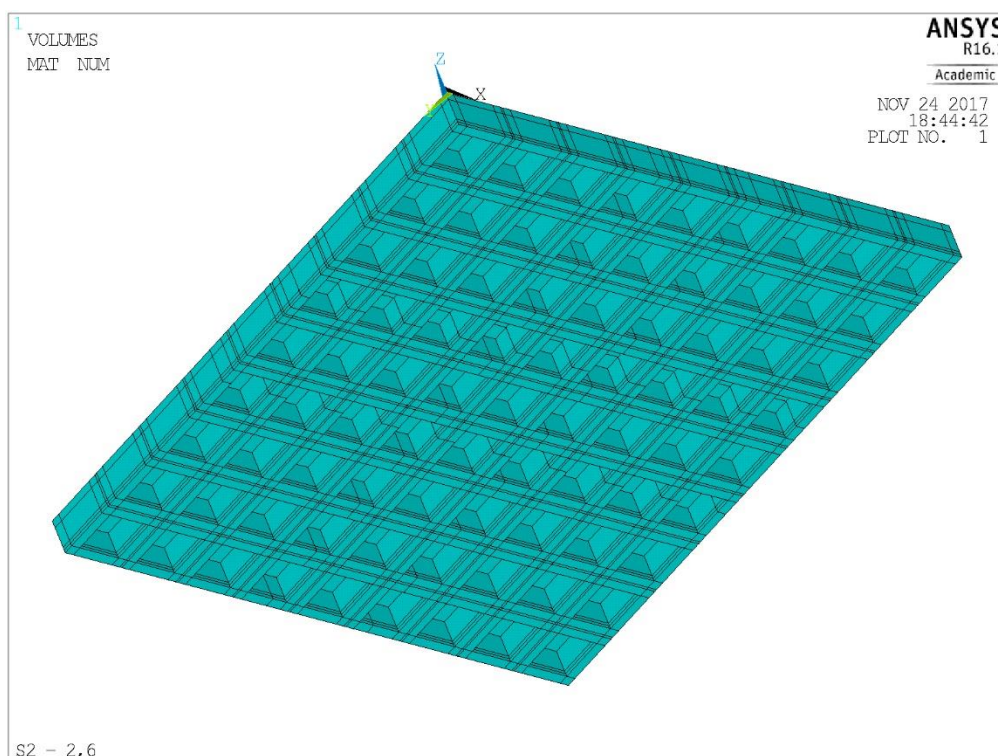


Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.1 Geometria em elementos finitos

A geometria das lajes foi realizada no próprio ANSYS, apesar do programa permitir a importação de outros programas. Na figura 52 é ilustrado um exemplo de geometria modelada no ANSYS.

Figura 53 – Geometria modelada da laje S2



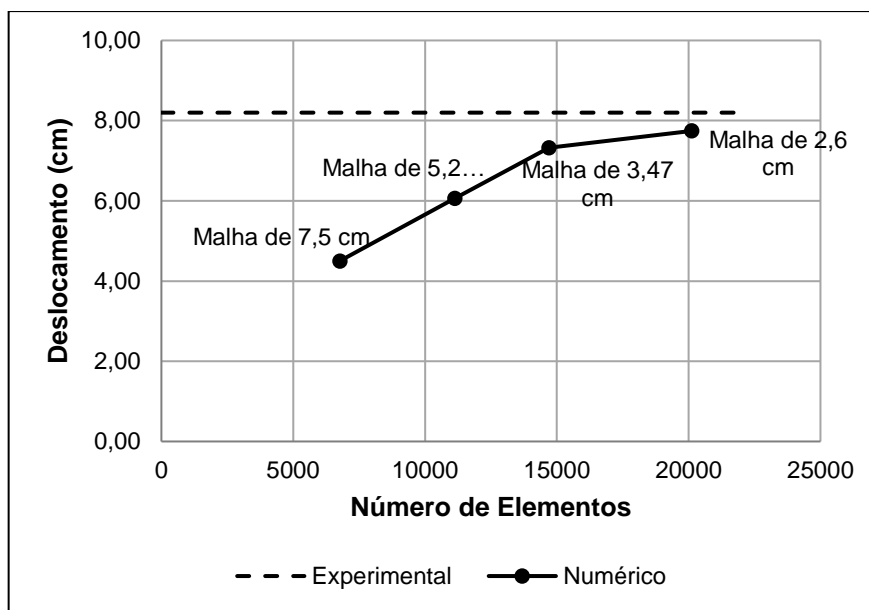
Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

3.2.2 Escolha da malha em elementos finitos

Para a escolha da malha em elementos finitos realizou-se um estudo de convergência em função dos deslocamentos obtidos na laje S2, o qual é apresentado na figura 54. Este estudo de convergência foi realizado para centro da laje para o último passo de carga do carregamento.

Através do estudo de convergência, verificou-se que a malha de 2,6 cm tende a se aproximar dos resultados experimentais bem como a ser estabilizar, diante disso, optou-se por essa malha na análise das lajes da aplicação 01.

Figura 54 – Convergência da malha para a laje S2

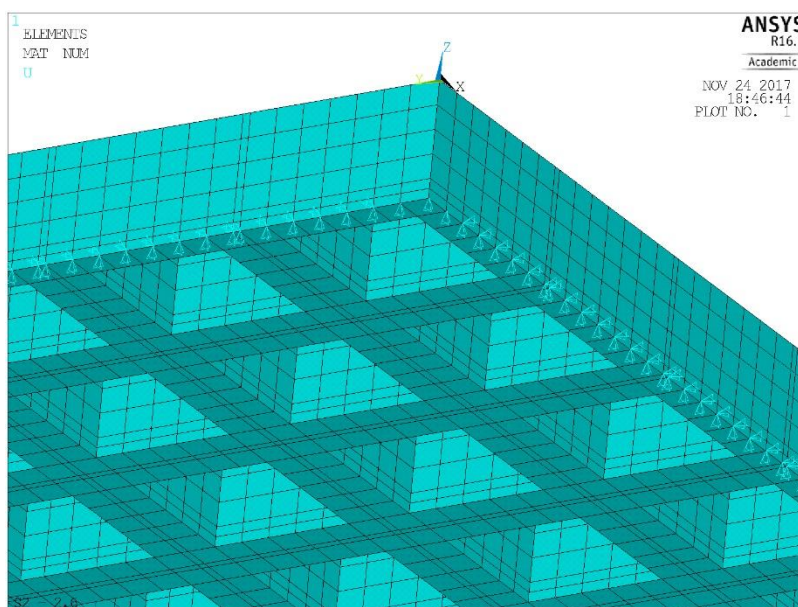


Fonte: Do autor.

3.2.3 Condições de contorno

As condições de contorno foi a mesma em todas as lajes, todos os nós na linha do apoio foram impedidos os deslocamento vertical (UZ) e os deslocamentos laterais (UX ou UY), com exceção dos cantos onde só foram impedidos os deslocamentos verticais, conforme pode ser visto na figura 55.

Figura 55 – Condições de contorno das lajes.

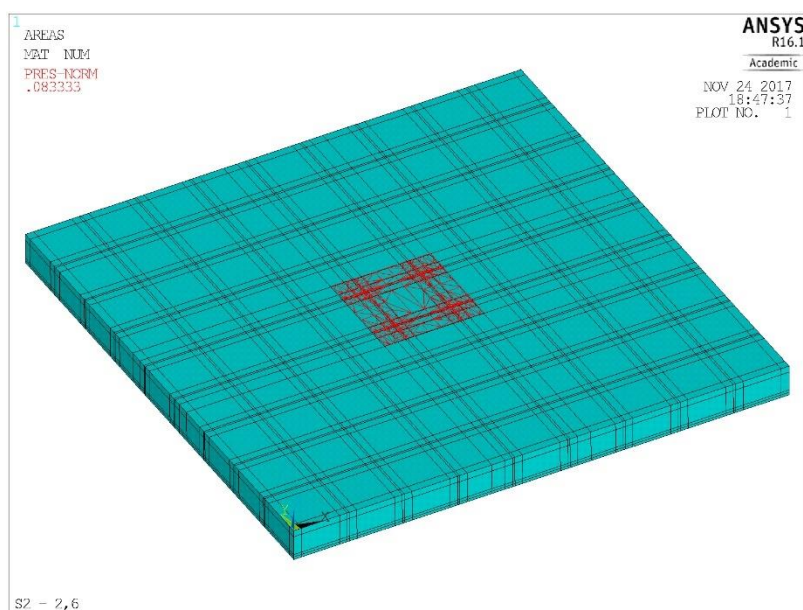


Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

3.2.4 Cargas aplicadas nas lajes

Abdul-Wahab e Khalil (2000) aplicaram nas lajes durante seus ensaios uma carga concentrada sobre uma placa metálica quadrada de 30 cm de lado, dessa forma, nas simulações numéricas aplicou-se uma carga distribuída na área 900 cm² correspondente a carga utilizada pelos autores, conforme mostra a figura 56.

Figura 56 – Exemplo de carga aplicada na laje



Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

Além disso, nos ensaios experimentais, os autores mediram os deslocamentos até próximo a ruptura, sendo, portanto, essas cargas aplicadas nos modelos numéricos, conforme destaca a tabela 11.

Tabela 11 – Pressões aplicada nas lajes

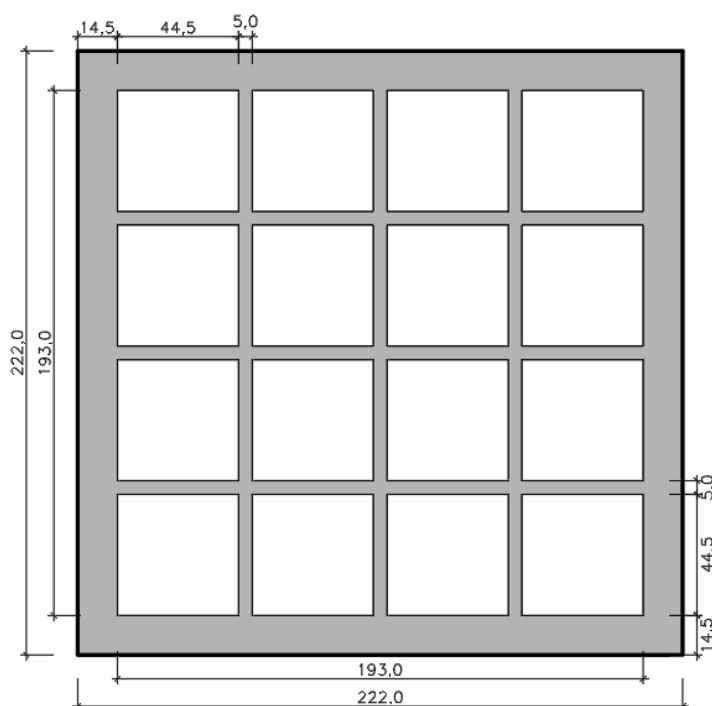
Laje	Carga de ruptura (kN)	Carga estimada de ruptura (kN)	Carga com deslocamento monitorado (kN)	Pressão aplicada (kN/cm ²)
S1	105,00	96,30	80,00	0,088889
S2	81,00	79,00	75,00	0,083333
S3	65,00	62,00	60,00	0,066667
S4	48,00	48,00	45,00	0,050000

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 Aplicação 02 – Laje nervurada ensaiada por Bastos (2016)

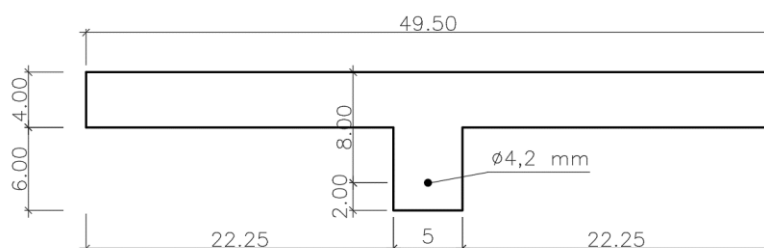
Bastos (2016) ensaiou uma laje nervurada bidirecional submetida a um carregamento uniformemente distribuído, a qual foi objeto de estudo deste trabalho. A geometria da laje pode ser visualizada nas figuras 57 e 58.

Figura 57 – Geometria em planta da laje ensaiada (cm)



Fonte: Adaptado de Bastos (2016) pelo autor.

Figura 58 – Dimensões das nervuras (cm)

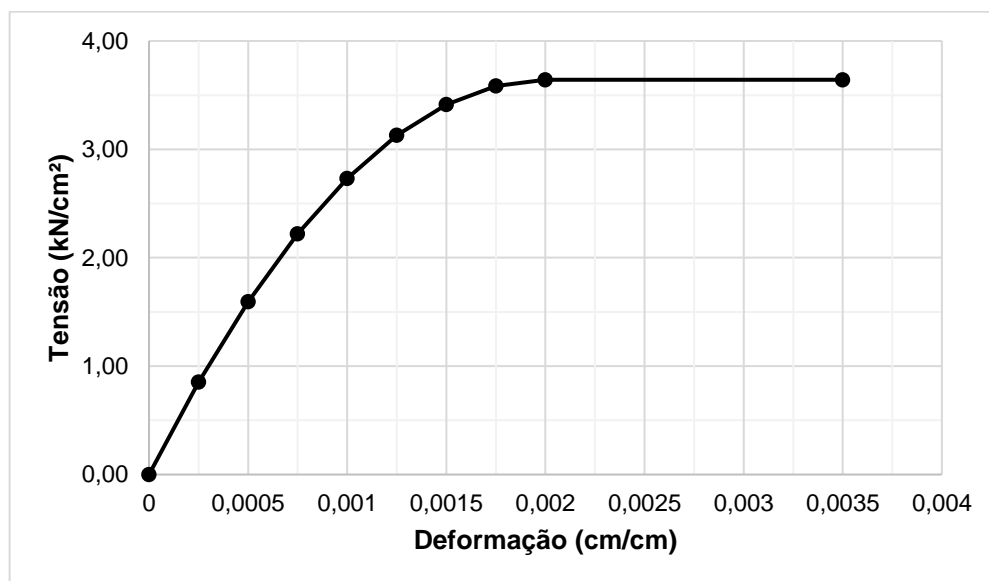


Fonte: Adaptado de Bastos (2016) pelo autor.

A laje foi ensaiada aos 28 dias, bem como os corpos de provas cilíndricos, obtendo uma resistência média à compressão de 36,42 MPa e uma tensão limite de tração de 0,231 kN/cm². Além disso, o aço utilizado nas lajes também foi ensaiado, obtendo uma resistência média de 734,33 MPa.

A partir da resistência média à compressão foi gerado um diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto da laje ensaiada, conforme mostra a figura 59.

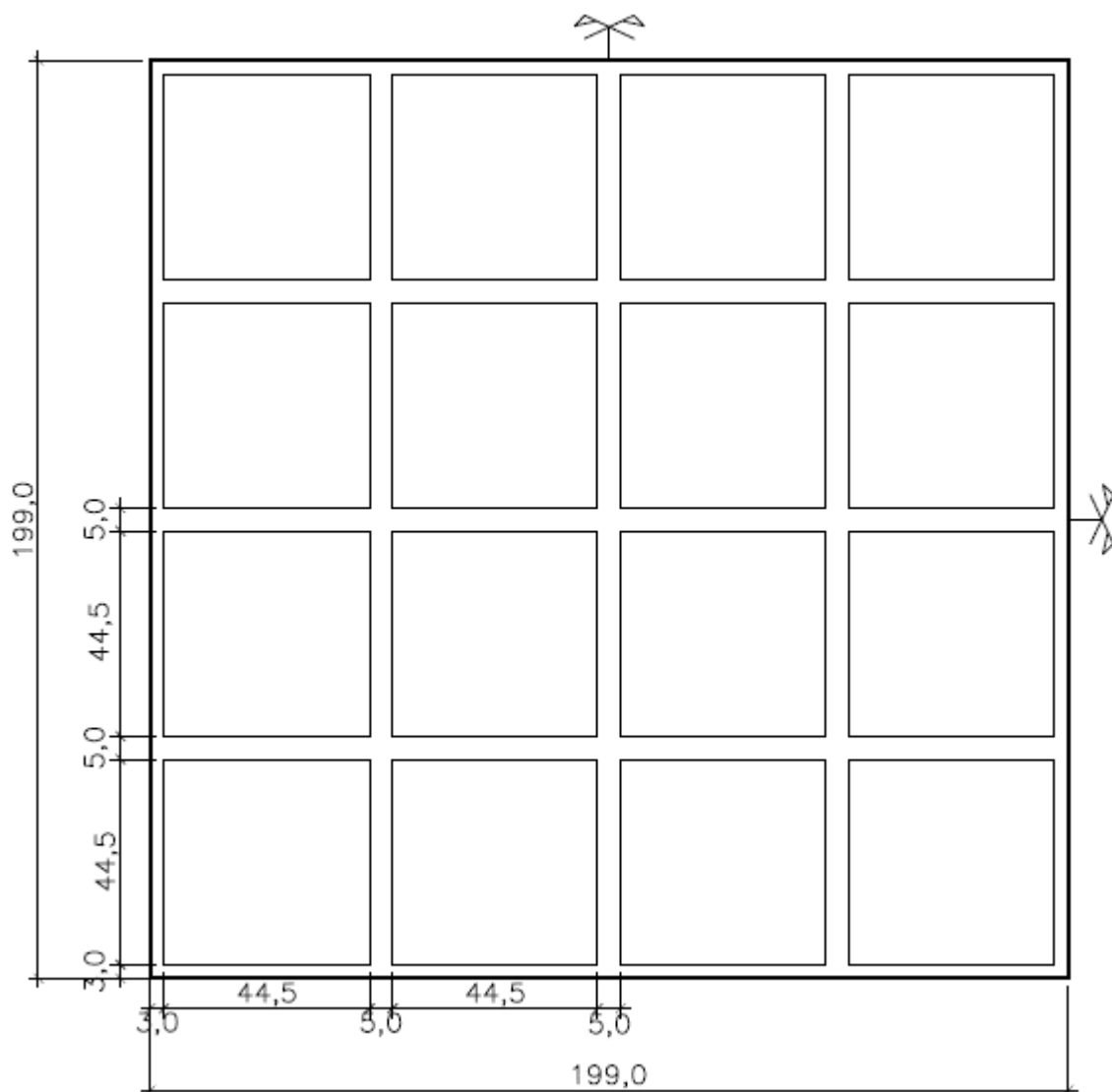
Figura 59 – Diagrama tensão-deformação para o concreto da laje



Fonte: Elaborado pelo autor

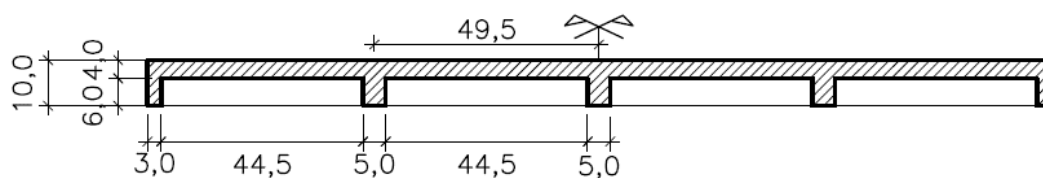
A geometria adotada para a laje ensaiada por Bastos (2016) pode ser vista nas figuras 60 e 61, na qual foi adotado mesmo vão livre teórico adotado pelo autor.

Figura 60 – Vista em planta em centímetros da geometria da laje de Bastos (2016)



Fonte: Do autor

Figura 61 – Seção transversal em centímetros da laje de Bastos (2016)

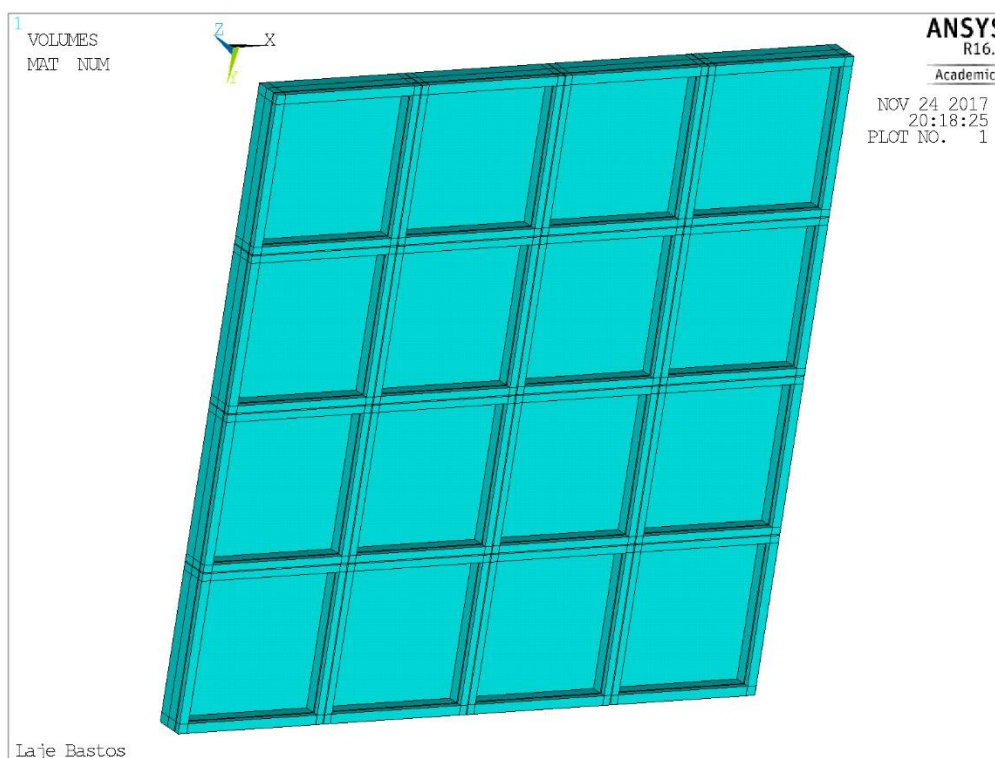


Fonte: Do autor

3.3.1 Geometria em elementos finitos

A geometria da laje foi realizada no próprio ANSYS, apesar do programa permitir a importação de outros programas. Na figura 62 é possível visualizar a geometria da laje modelada no programa.

Figura 62 – Geometria em elementos finitos da laje de bastos (2016)



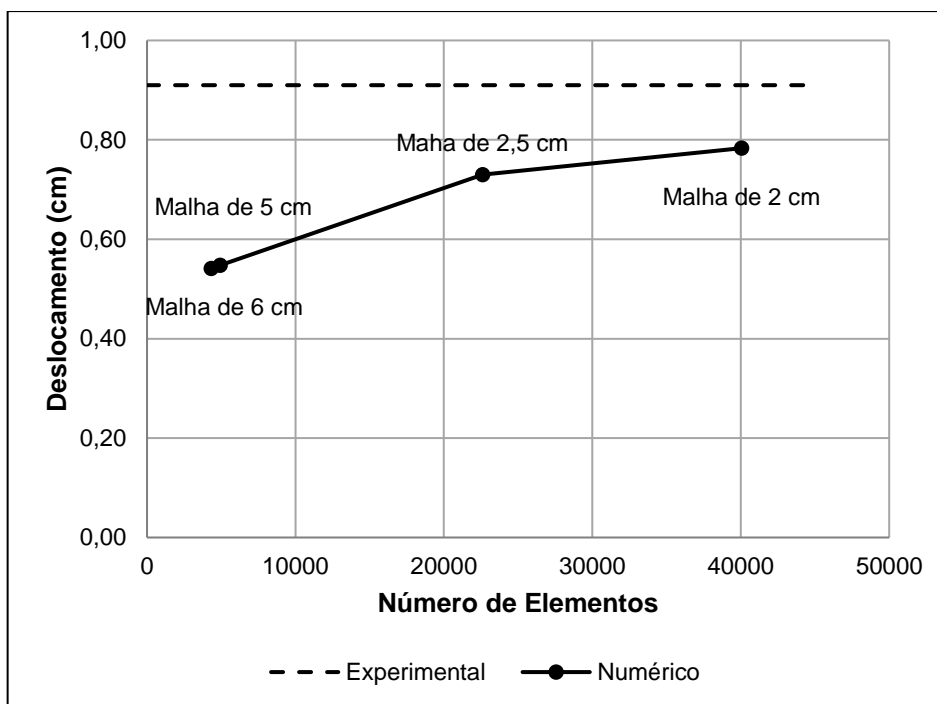
Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

3.3.2 Escolha da malha em elementos finitos

Para a escolha da malha em elementos finitos realizou-se um estudo de convergência em função dos deslocamentos obtidos no centro da laje para o último passo de carga, o qual é apresentado na figura 63.

Através do estudo de convergência, verificou-se que a malha de 2,0 cm tende a se aproximar dos resultados experimentais bem como a ser estabilizar, diante disso, optou-se por essa malha na análise das lajes da aplicação 02.

Figura 63 – Convergência da malha para a laje de Bastos (2016)

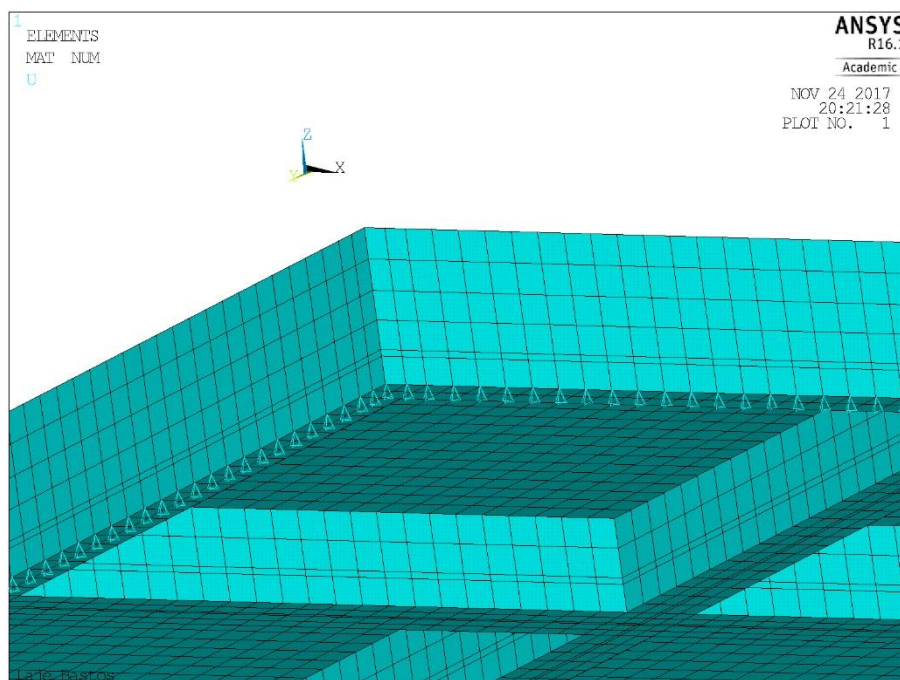


Fonte: Do autor.

3.3.3 Condições de contorno

A laje assim como no ensaio foi considerada simplesmente apoiada, as condições de contorno adotadas podem ser visualizadas na figura 64.

Figura 64 – Condições de contorno para a laje de Bastos (2016)

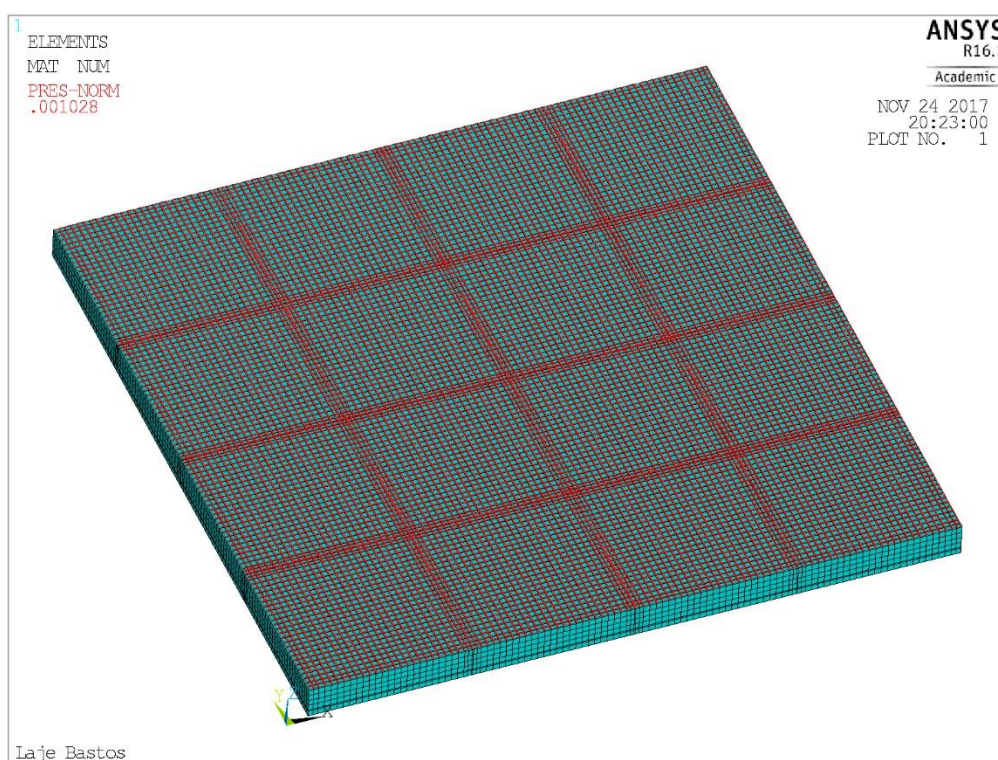


Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

3.3.4 Cargas aplicadas na laje

O carregamento aplicado por Bastos (2016) foi através de água, de forma a obter um carregamento uniformemente distribuído na laje, chegando a um carregamento máximo de 0,001028 kN/cm², no qual a laje apresentava poucas fissuras e poucos sinais de ruptura próxima. Dessa forma, aplicou-se o carregamento máximo utilizado no ensaio em toda a laje, conforme mostra a figura 65.

Figura 65 – Carga aplicada na laje



Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

4 RESULTADOS

A seguir são apresentados os resultados numéricos obtidos para as aplicações estudadas, bem como os resultados experimentais, os quais serviram para comparação em outro capítulo.

4.1 Aplicação 01

Conforme a metodologia apresentada, a aplicação 01 consistiu em quatro lajes nervuradas bidirecionais das seis ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000), a S1, S2, S3 e S4, as quais foram moldadas em escala reduzida (1:4) e que, portanto, representam uma laje real de 600 x 600 cm.

4.1.1 Resultados experimentais da aplicação 01

Os resultados obtidos por Abdul-Wahab e Khalil (2000) são apresentados em seu artigo na forma de gráficos, dos quais graficamente retirou-se os deslocamentos correspondentes as cargas aplicadas, os quais são apresentados na tabela 12.

Tabela 12 – Deslocamentos experimentais no centro das lajes

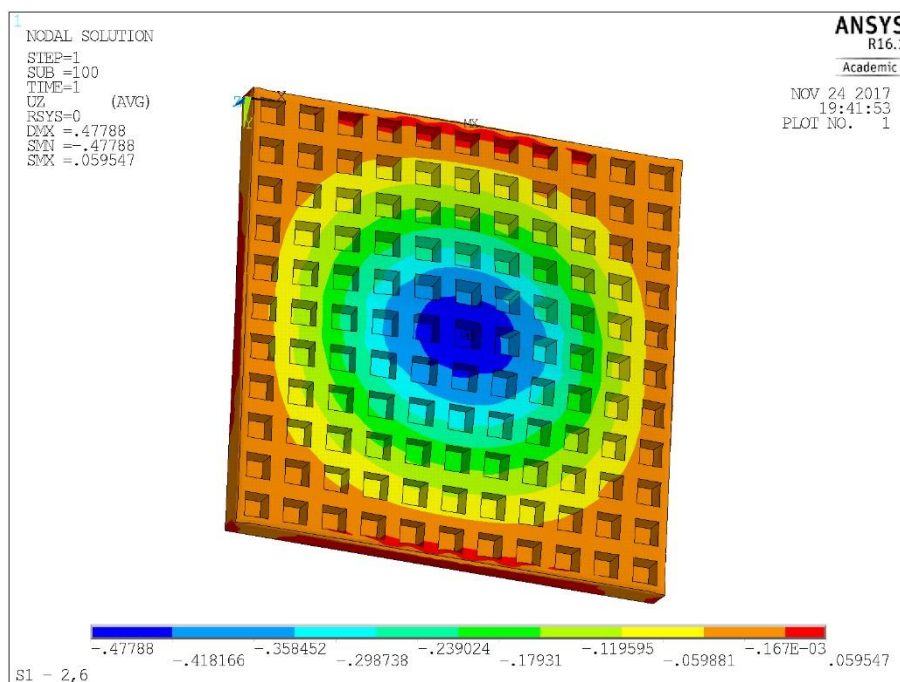
Força aplicada (kN)	Deslocamento S1 (mm)	Deslocamento S2 (mm)	Deslocamento S3 (mm)	Deslocamento S4 (mm)
0	0,00	0,00	0,00	0,00
10	0,10	0,30	0,30	0,50
20	0,30	0,60	1,00	1,70
30	0,60	1,40	2,40	3,30
40	1,40	2,40	3,80	6,20
45	-	-	-	10,00
50	2,20	3,30	5,40	-
60	3,00	4,50	10,50	-
70	4,20	7,00	-	-
75	-	8,20	-	-
80	5,50	-	-	-

Fonte: Adaptado de Abdul-Wahab e Khalil (2000).

4.1.2 Resultados numéricos para a aplicação 01

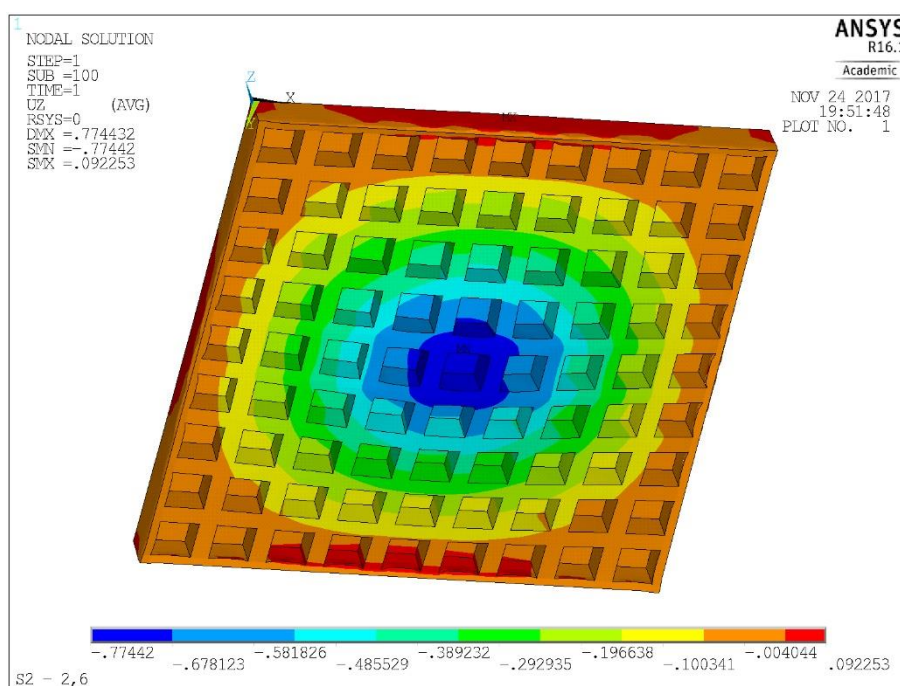
Nas figuras 66, 67, 68 e 69 é possível visualizar os deslocamentos em centímetros obtidos para o último passo de carga nas lajes.

Figura 66 – Deslocamentos da laje S1 para o último subpasso de carga



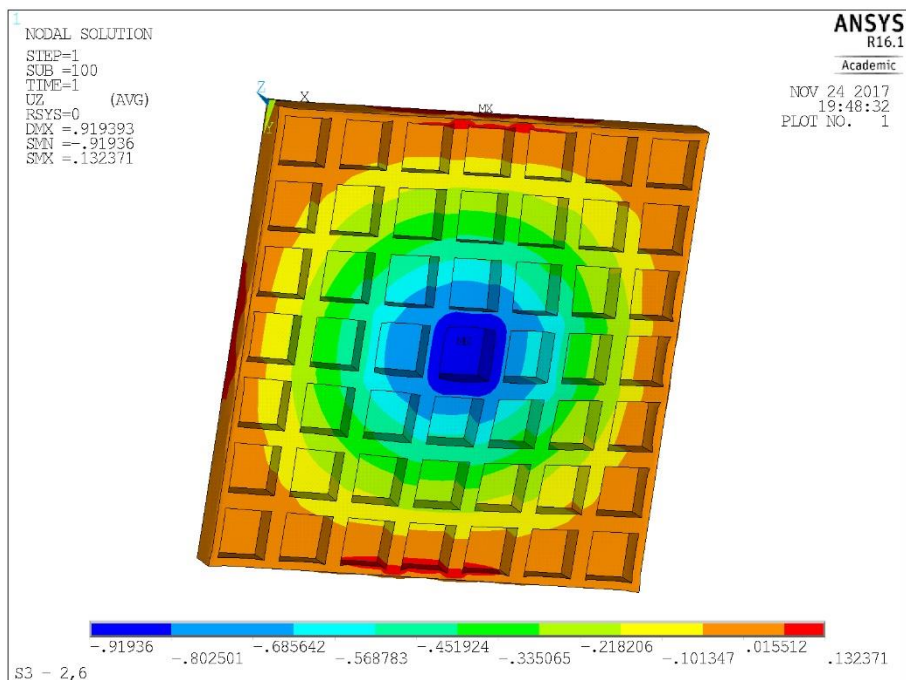
Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

Figura 67 – Deslocamentos da laje S2 para o último subpasso de carga



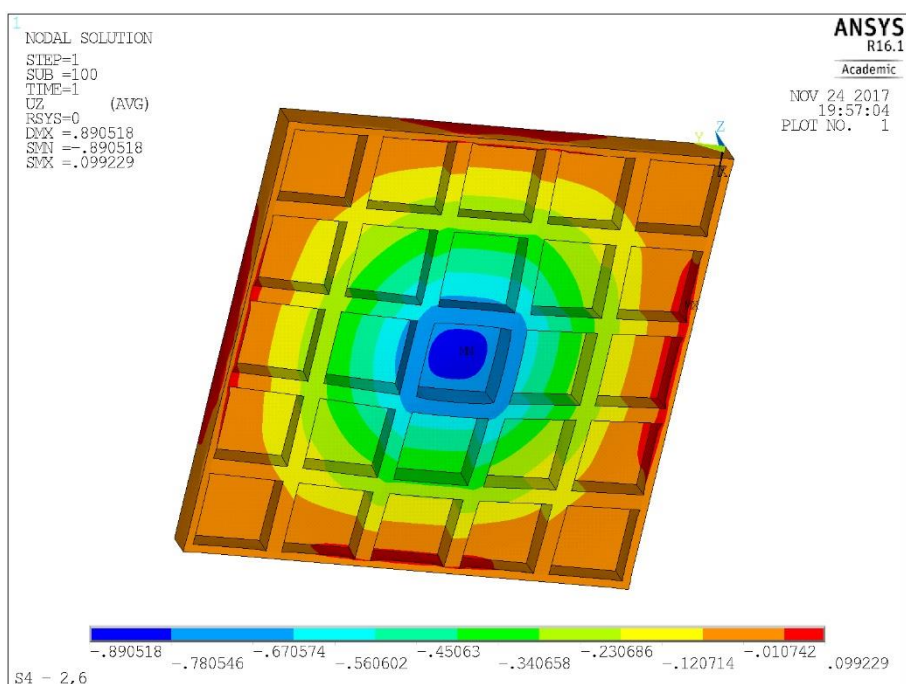
Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

Figura 68 – Deslocamentos da laje S3 para o último subpasso de carga



Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

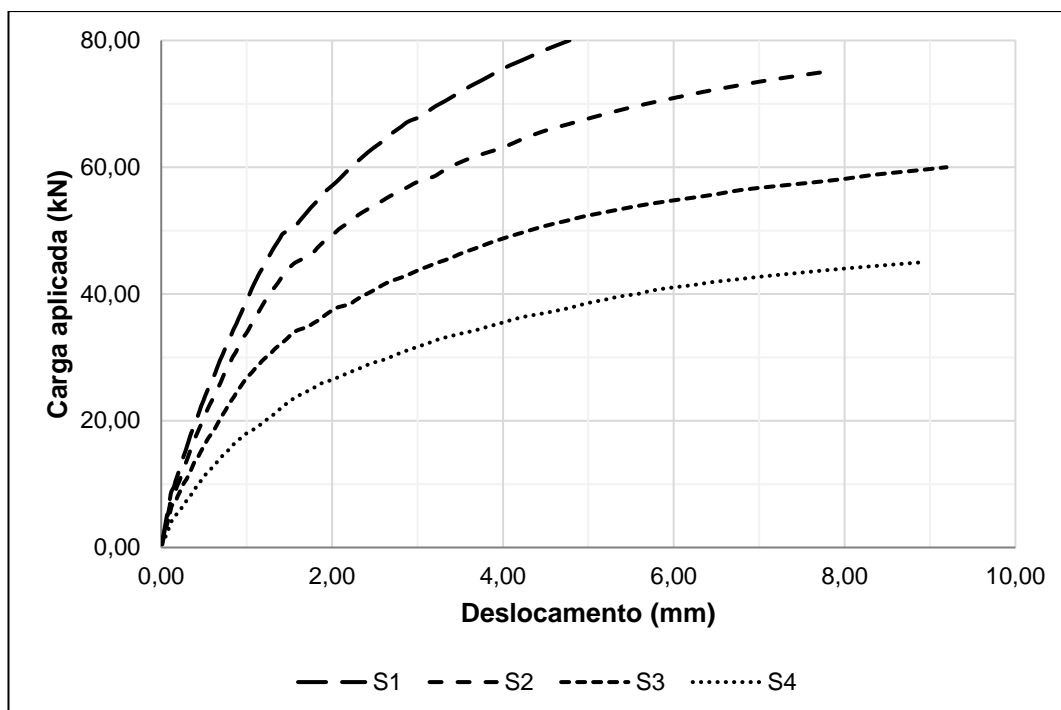
Figura 69 – Deslocamentos da laje S4 para o último subpasso de carga



Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

A partir dos deslocamentos obtidos de cada subpasso de carga, criou-se para cada laje uma curva de deslocamento em relação à carga aplicada, a qual é possível visualizar na figura 70.

Figura 70 – Deslocamentos em relação à carga aplicada para cada laje



Fonte: Do autor.

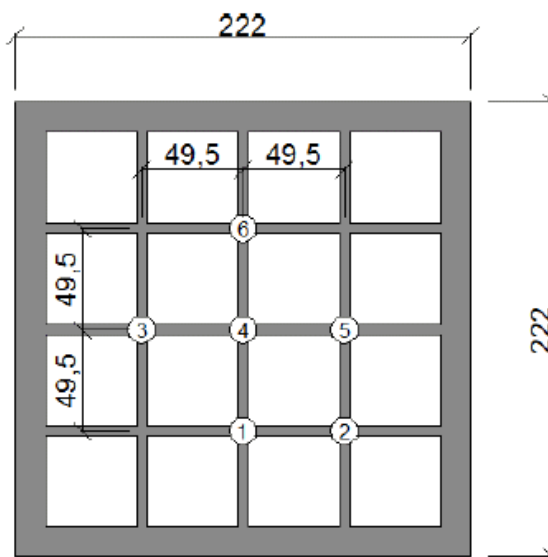
4.2 Aplicação 02

Conforme a metodologia apresentada, a aplicação 02 consiste na análise numérica da laje nervurada bidirecional ensaiada por Bastos (2016), a qual era uma laje em escala real.

4.2.1 Resultados experimentais da aplicação 02

Bastos (2016) mediu os deslocamentos em seis pontos da laje durante o ensaio com o uso de deflectômetros, conforme mostra a figura 71.

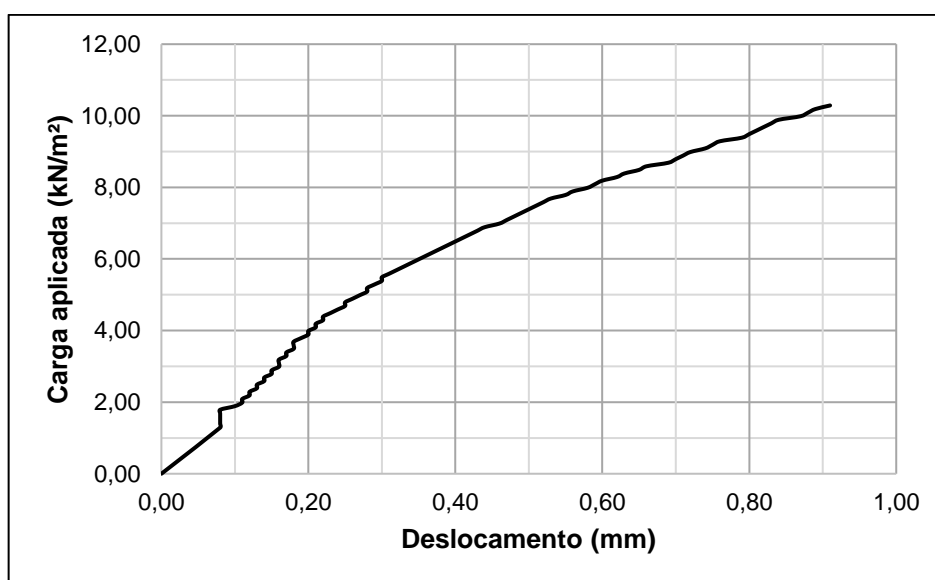
Figura 71 – Posição dos deflectómetros na laje ensaída por Bastos (2016)



Fonte: Bastos (2016)

Contudo, como critério de comparação, escolheu-se analisar apenas os deslocamentos referentes ao ponto 4, o qual estava localizado no centro da laje e no qual se obteve os maiores deslocamentos durante o ensaio. Na figura 72 é possível visualizar os deslocamentos obtidos para o centro da laje durante o ensaio.

Figura 72 – Deslocamentos obtidos por Bastos (2016) no centro da laje

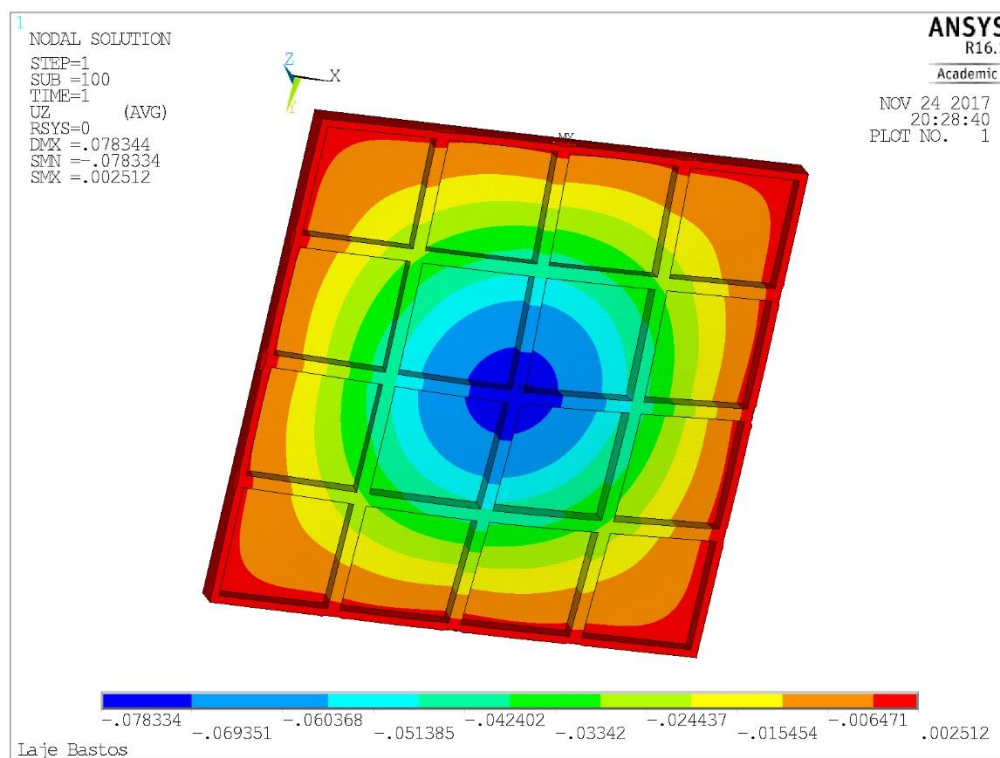


Fonte: Adaptado de Bastos (2016) pelo autor.

4.2.2 Resultados numéricos da aplicação 02

Na figura 70 é possível visualizar os deslocamentos em centímetros obtidos para o último passo de carga na laje.

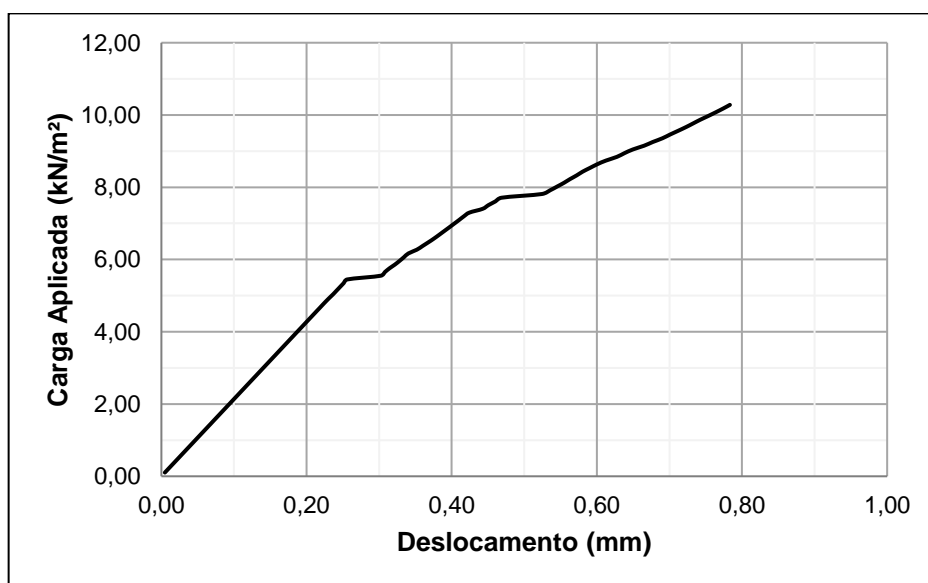
Figura 73 – Deslocamentos da laje para o último subpasso de carga



Fonte: Extraído do Ansys pelo autor.

A partir dos deslocamentos obtidos ao longo do carregamento da estrutura, criou-se para cada laje uma curva de deslocamento em relação à força aplicada, a qual é possível visualizar na figura 74.

Figura 74 – Deslocamentos do centro da laje ao longo do carregamento



Fonte: Do autor.

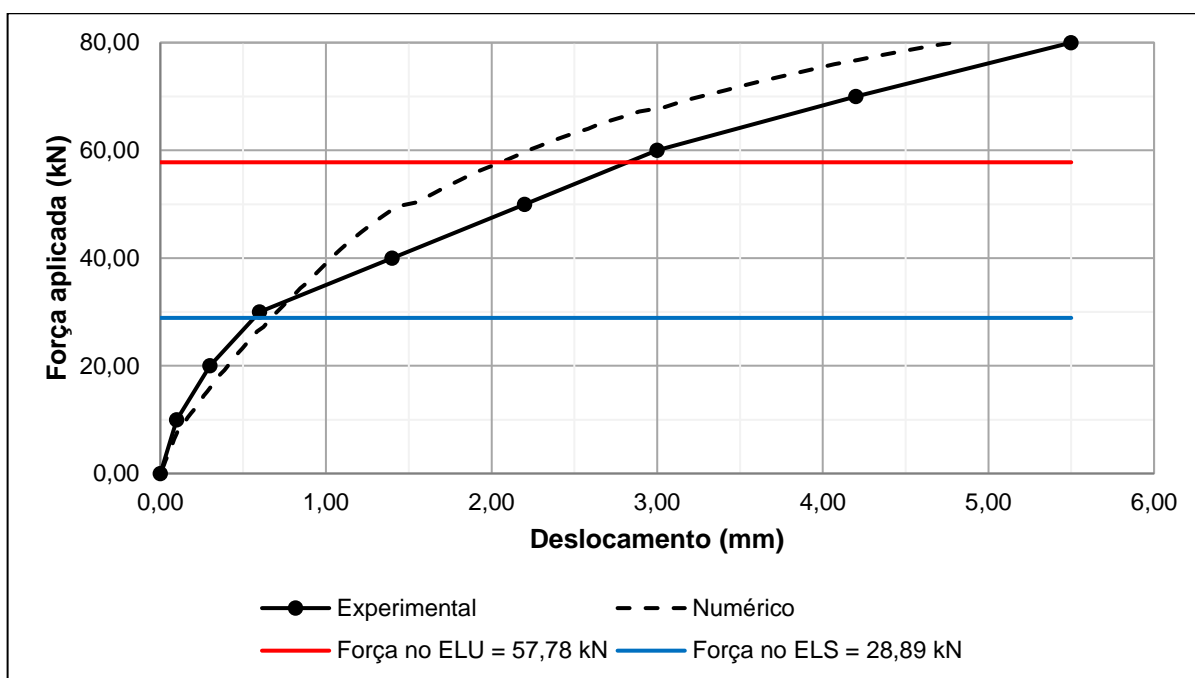
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo será apresentado comparações entre as análises numéricas realizadas neste trabalho e as experimentais em relação às cargas no ELU e ELS.

5.1 Aplicação 01

Em relação a laje S1 é possível observar na figura 75 os deslocamentos obtidos numericamente e no ensaio experimental.

Figura 75 – Comparação de deslocamentos para a laje S1

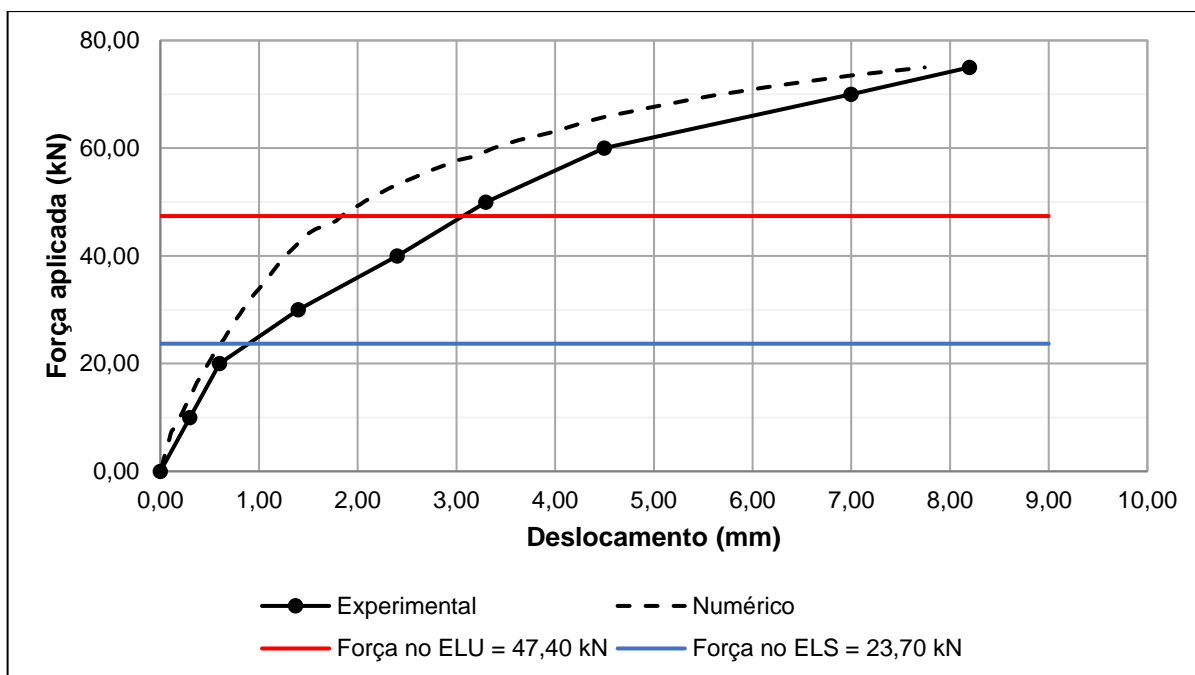


Fonte: Do autor.

Através da figura é possível notar que no início do carregamento os resultados numéricos são mais flexíveis que o experimental, o que deixa acontecer após aproximadamente a carga de 32 kN. A partir desse ponto os resultados numéricos são mais rígidos que os experimentais.

Em relação a laje S2, a figura 76 apresenta os deslocamentos obtidos numericamente e no ensaio experimental.

Figura 76 – Comparação de deslocamentos para a laje S2

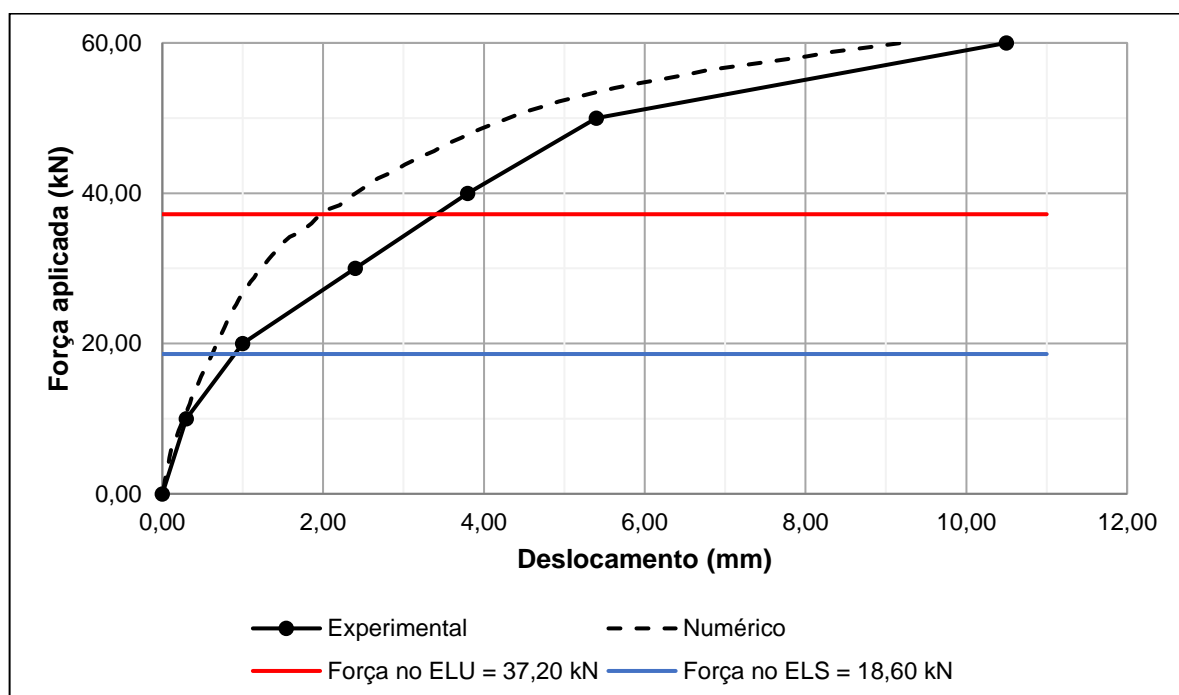


Fonte: Do autor.

No caso da laje S2, é possível notar que durante todo o carregamento do elemento estrutural o método numérico foi mais rígido que o experimental.

Para a laje S3, os deslocamentos numéricos e experimentais são apresentados na figura 77.

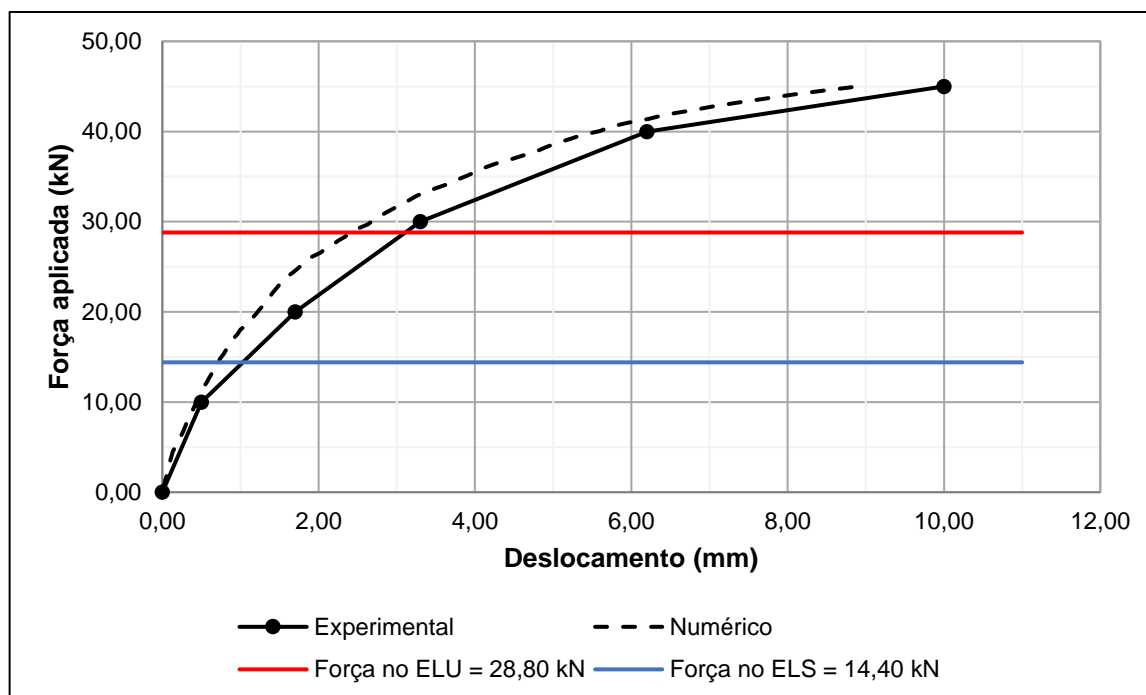
Figura 77 – Comparação de deslocamentos para a laje S3



Fonte: Do autor.

No início do carregamento da laje S3 o modelo numérico apresentou praticamente o mesmo deslocamento que o experimental, e após 15 kN a simulação numérica se comportou de forma mais rígida. Em relação a laje S4, os deslocamentos numéricos e experimentais são apresentados na figura 78.

Figura 78 – Comparação de deslocamentos para a laje S4



Fonte: Do autor.

Através da análise da figura 78 é possível visualizar que praticamente durante todo o carregamento o método numérico se apresentou de forma mais rígida que o experimental em relação para a laje S4.

Na tabela 13 são mostrados os deslocamentos obtidos pelo método dos elementos finitos e experimentalmente para as cargas correspondentes ao ELU e ELS.

Tabela 13 – Resultados numéricos e experimentais dos deslocamentos

Laje	Deslocamentos no ELU (mm)		Deslocamentos no ELS (mm)	
	Experimental	Numérico	Experimental	Numérico
S1	2,8224	2,0579	0,5667	0,6669
S2	2,9880	1,8370	0,8960	0,6131
S3	3,4080	1,9767	0,9020	0,6212
S4	3,1080	2,4115	1,0280	0,7112

Fonte: Do autor.

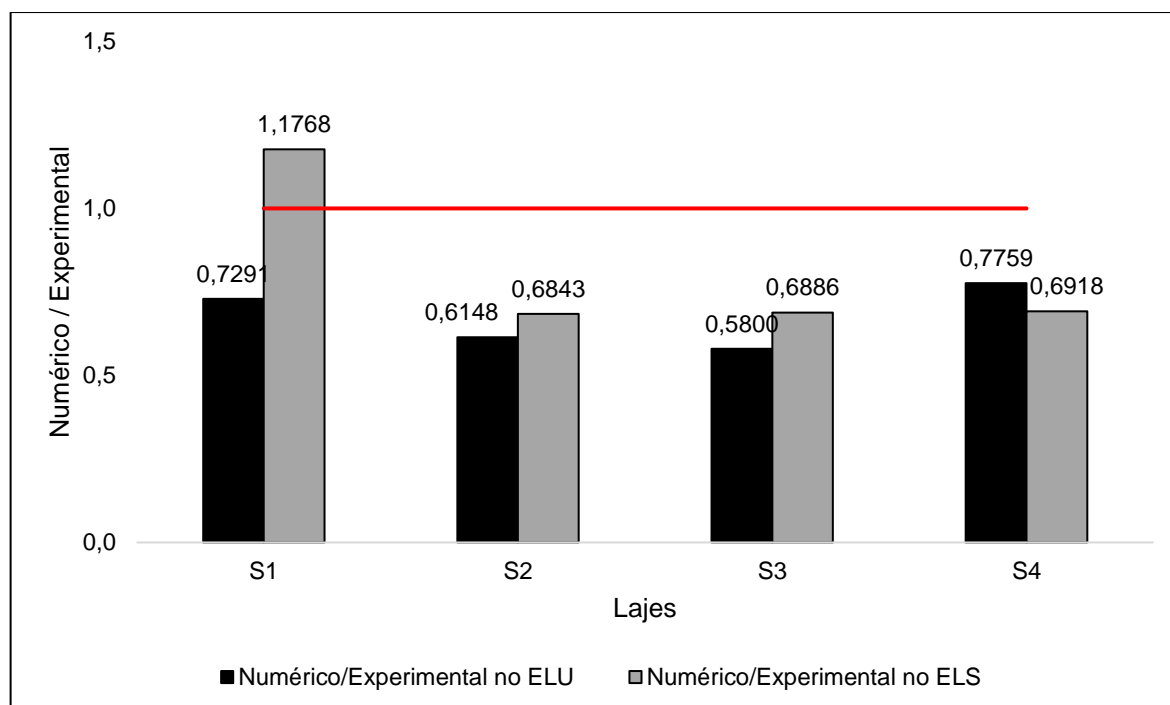
De forma a analisar o desempenho do modelo numérico, a tabela 14 e a figura 79 apresentam a relação entre os deslocamentos numéricos divididos pelos experimentais, ou seja, o quão próximo o modelo numérico é do experimental.

Tabela 14 – Relação entre os deslocamentos numéricos e os experimentais

Laje	Numérico/Experimental no ELU	Numérico/Experimental no ELS
S1	0,7291	1,1768
S2	0,6148	0,6843
S3	0,5800	0,6886
S4	0,7759	0,6918
Média	0,6750	0,8104
Desvio Padrão	0,0927	0,2443

Fonte: Do autor.

Figura 79 – Gráfico com a relação dos deslocamentos numéricos pelos experimentais



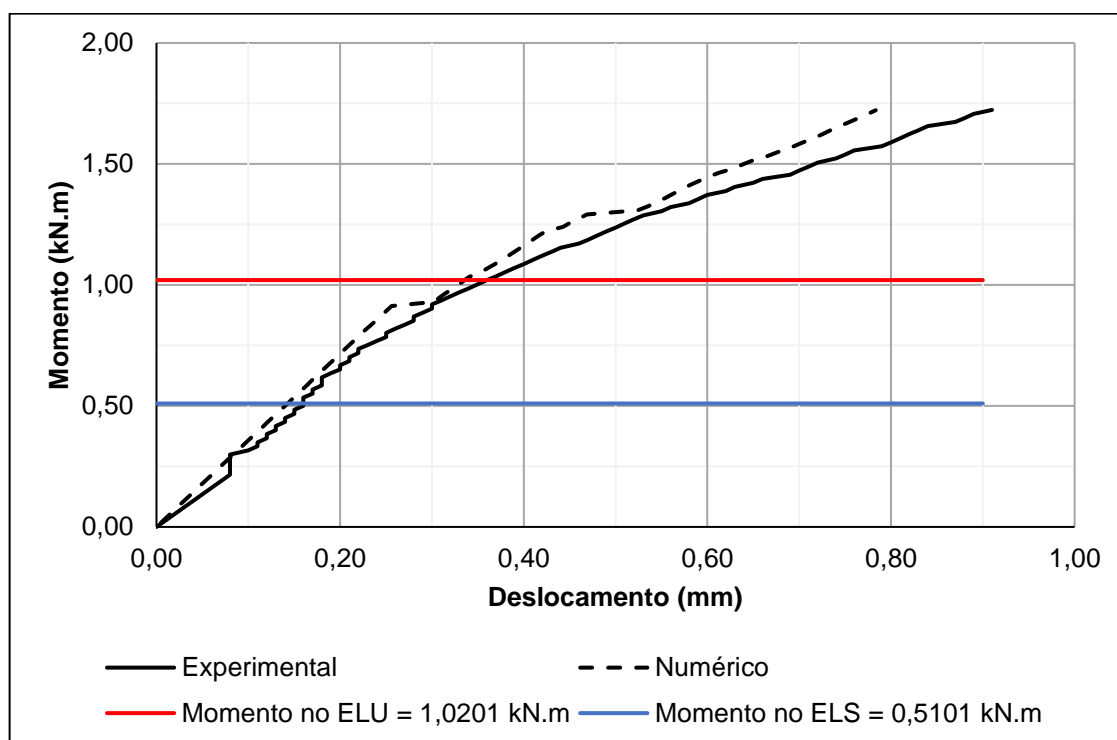
Fonte: Do autor.

A partir dos resultados é possível verificar que, o modelo numérico apresentou em média uma previsão de deslocamentos superior para o ELS do que para o ELU, contudo, o desvio padrão para o ELS foi bem superior do que para o ELU.

5.2 Aplicação 02

Ao analisar os deslocamentos obtidos pelo método dos elementos finitos em comparação aos experimentais é possível perceber que os resultados obtidos pelo método numérico se mantiveram próximo ao experimental, mostrando-se um pouco mais rígido durante todo o carregamento, conforme mostra a figura 80.

Figura 80 – Comparação de deslocamentos para a laje de Bastos (2016)

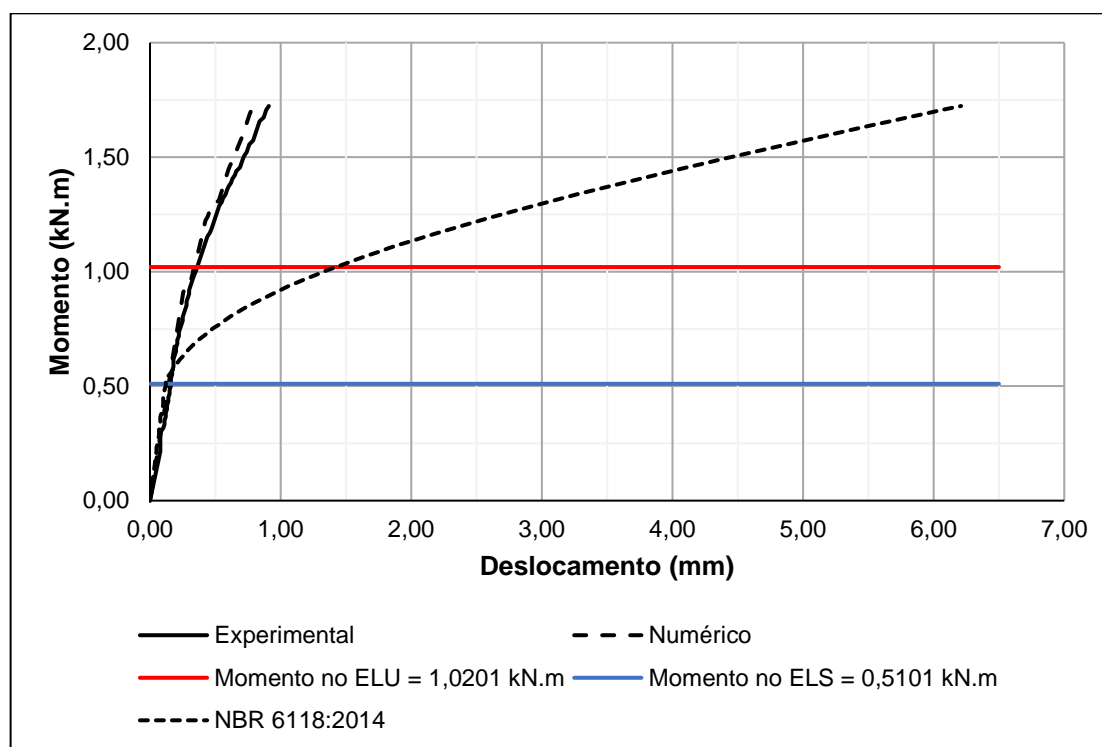


Fonte: Do autor.

Frente aos resultados, pode-se verificar que o método numérico teve no decorrer do carregamento o comportamento ligeiramente mais rígido que o experimental.

Além disso, na figura 81 é possível comparar os deslocamentos calculados por Bastos (2016) segundo o método de cálculo presente na NBR 6118:2014 com a análise não linear pelo método dos elementos finitos e os resultados experimentais.

Figura 81 – Comparação de deslocamentos numéricos, experimentais e calculados



Diante dos resultados ilustrados na figura 77, nota-se que o método de cálculo presente na NBR 6118:2014, o qual incorpora o modelo de Branson, apresentou até o momento de fissuração uma boa previsão dos deslocamentos, contudo, após a fissuração, o método da norma brasileira se mostrou bem conservador em relação a esse caso estudado.

Os resultados dos deslocamentos no ELU e ELS obtidos pelo método numérico, pelos ensaios experimentais e teóricos conforme a NBR 6118:2014 são mostrados na tabela 15.

Tabela 15 – Resultados experimentais, numéricos e teóricos dos deslocamentos

Deslocamentos no ELU (mm)			Deslocamentos no ELS (mm)		
Experimental	Numérico	Teórico	Experimental	Numérico	Teórico
0,3601	0,3358	1,4214	0,1600	0,1426	0,1200

Fonte: Do autor.

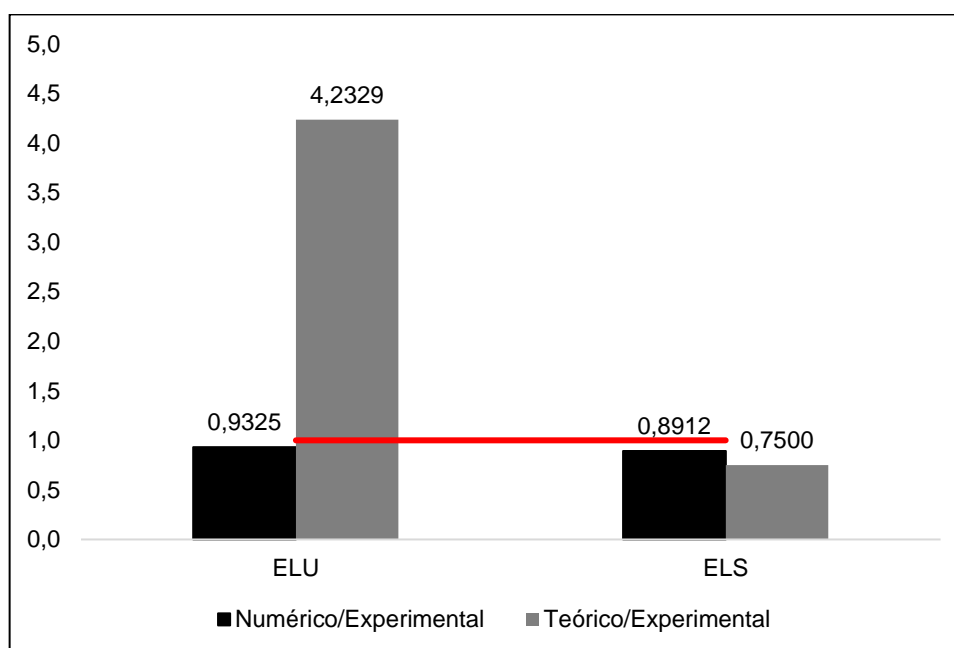
De forma a analisar o desempenho do modelo numérico e do modelo teórico da NBR 6118:2014, a tabela 16 e a figura 82 apresentam a relação entre os deslocamentos numéricos divididos pelos experimentais, ou seja, o quão próximo o modelo numérico é do experimental.

Tabela 16 – Relação entre os deslocamentos com os modelos de cálculo e experimentais

ELU		ELS	
Numérico/Experimental	Teórico/Experimental	Numérico/Experimental	Teórico/Experimental
0,9325	4,2329	0,8912	0,7500

Fonte: Do autor.

Figura 82 – Gráfico com a relação dos deslocamentos dos modelos de cálculo pelos experimentais



Fonte: Do autor.

A partir dos resultados é possível verificar que, os dois modelos apresentaram resultados satisfatórios quanto a previsão de deslocamentos no ELS, contudo, em relação ao ELU, o resultado teórico calculado com a NBR 6118:2014 apresentou resultados discrepantes com o experimental. Além disso, tanto em relação ao ELU, como em relação ao ELS, o modelo de cálculo não linear pelo método dos elementos finitos apresentou desempenho bem superior.

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho analisou através do método dos elementos finitos os deslocamentos obtidos em quatro lajes nervuradas ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000) e a laje nervurada ensaiada por Bastos (2016). A análise realizada pelo autor foi do tipo não linear, no qual se considerou a não linearidade dos materiais concreto e aço, associando ao aço o critério de Von Mises e ao concreto o critério de Willam e Warnke.

Frente aos resultados obtidos na aplicação 01, todas as análises numéricas apresentaram um comportamento similar ao experimental durante o carregamento. Além disso, as previsões dos deslocamentos para o ELS foram superiores à previsão quanto aos deslocamentos no ELU, mas a primeira mostrou um desvio padrão superior. Cabe lembrar, que um carregamento concentrado apenas numa área de uma laje nervurada, o qual foi utilizado nos ensaios e nas simulações, não é o usual em situações reais de projeto.

Na aplicação 02, o modelo em elementos finitos mostrou novamente um comportamento similar ao experimental durante o carregamento. Ademais, o modelo numérico apresentou para o caso estudado ganhos significativos na determinação dos deslocamentos no ELU e ganhos satisfatórios no ELS em relação ao método presente na NBR 6118:2014.

Além disso, destaca-se que as cargas correspondentes ao ELS foram estimadas com base na laje de Bastos (2016), considerando uma carga de uso de 2 kN/m^2 e um fator de redução de combinação quase permanente de 30%.

Diante do exposto, para os casos estudados, conclui-se que o método de análise não linear em elementos finitos demonstrou resultados satisfatórios em relação a previsão de deslocamentos, além disso, nota-se que o método apresenta potencial de aplicação.

A realização do presente trabalho proporcionou ao acadêmico um amplo conhecimento teórico e prático sobre lajes nervuradas, bem como o método dos elementos finitos, o qual pode ser aplicado a quaisquer outros tipos de estruturas. Além disso, o método dos elementos finitos e análises não lineares são tópicos incomuns para a graduação, logo, esse trabalho também serviu para ampliar os conhecimentos adquiridos ao longo do curso.

Para trabalho futuros, recomenda-se a aplicação do modelo de cálculo aqui apresentado em outras lajes nervuradas submetidas à cargas distribuídas de forma a aumentar a confiabilidade dos resultados, bem como em lajes de maiores dimensões e em lajes nervuradas apoiadas diretamente sobre pilares. Outra sugestão de estudo do modelo aqui aplicado, é na determinação das tensões em lajes nervuradas para a determinação dos momentos fletores. Além disso, a aplicação do modelo pode também ser estudada em outros tipos de elementos estruturais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDUL-WAHAB, H.M.S.; KHALIL, M. H. Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs. *Journal of Structural Engineering*, v. 126, n. 2, Feb., p. 219-227, 2000.

AJDUKIEWICZ, A.; KLISZCZEWIECZ, A. Experimental analysis of limit in a six-panel waffle flat-slab structure. *ACI Journal*, v.83, n. 6, p. 909-915, nov. 1986.

ALBUQUERQUE, A.T. *Análise de alternativas estruturais para edifícios em concreto armado*. 1999. 97f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.

ALVES FILHO, A. *Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE*. 2. ed. São Paulo: Érica, 2003.

ANSYS 16.1 *Reference Manual*. Swanson Analysis Systems, Inc., 2015.

ARAÚJO, J. M. A rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado. *Teoria e Prática na Engenharia Civil*, n.8, p. 1-9, abr. 2006.

_____. Análise não-linear de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado. *Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*, n.52,p. 43-52, set. 2003.

_____. *Curso de Concreto Armado*. Rio Grande: Dunas, v. 1-4, 2014.

ASSAN, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. 2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118 - Projeto de estruturas de concreto - Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.

_____. *NBR 8681 – Ações e segurança nas estruturas - Procedimento*. Rio de Janeiro, 2003.

_____. *NBR 14859-1 – Lajes pré-fabricadas de concreto - Parte 1: Vigotas, minipainéis e painéis - Requisitos*. Rio de Janeiro, 2016.

AZEVEDO, A. F. M. *Método dos Elementos Finitos*. 1. Ed. Porto, PT: Universidade de Porto, 2003.

BASTOS, Henrique Braga. *Análise teórica e experimental de lajes nervuradas bidirecionais*. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade de Santa Cruz do Sul, 2016.

BOCCHI JÚNIOR, Carlos Fernando. *Lajes nervuradas de concreto armado: projeto e execução*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Carlos, 1995.

CARVALHO, Roberto Chust. *Análise não-linear de pavimento de edifícios de concreto através da analogia de grelha*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 1994.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, v. 2, 2013.

CUNHA, José Carlos Aparecido de Carvalho; *Análise de lajes nervuradas bidirecionais através de modelos simplificados*. 2012. 97f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012.

DROPPA JÚNIOR, Alonso. *Análise estrutural de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo vigota com armação treliçada*. 1999. 177f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

D'AVILA, Virgínia Maria Rosito. *Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos*. 2003. 259f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

DIAS, Ricardo Henrique. *Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

DONIN, Christian. *Análise numérica de lajes nervuradas por meio do método dos elementos finitos*. 2007. 138f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2007.

DUTRA, Clairson. *Análise teórica e experimental de lajes cogumelo nervuradas em escala reduzida*. 2005. 194f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2005.

FRANCA, A.B.M.; FUSCO, P.B. *As lajes nervuradas na moderna construção de edifícios*. São Paulo, AFALA & ABRAPEX, 1997.

FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. *Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução*. 1989. 262f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1989.

GUERRIN, A.; LAVAUUR, R. C. *Tratado de concreto armado*. São Paulo: Hemus, v. 3, 2002.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. *Construções de concreto*. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1977-1983. 6 v.

LOGAN, D. L. *A first course in the finite element method*. 4. ed. United States: Thomson, 2007.

NAPPI, Sérgio Castello Branco. *Análise comparativa entre lajes maciças, com vigotes pré-moldados e nervuradas*. 1993. 85f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 1993.

OLIVEIRA, R. S.; ARAÚJO, D. L.; RAMALHO, M. A. *Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais*. E-Artigo ABECE. São Paulo, 2000.

RECALDE, Bruno Ramón Blanc. *Análise numérica de flexão em lajes nervuradas com a consideração dos efeitos de fissuração no concreto*. 2014. 138f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2014.

SCHWETZ, P. F. *Análise teórico-experimental de uma laje nervurada em modelo reduzido sujeita a um carregamento linear*. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SCHWETZ, P. F. *Análise numérico-experimental de lajes nervuradas sujeita a cargas estáticas de serviço*. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

SELISTRE, Sérgio Leandro Cremale. *Análise teórico-experimental de uma laje nervurada de microconcreto armado submetida a um carregamento uniformemente distribuído*. 2000. 144f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2000.

SILVA, Andréia Rodrigues da Silva. *Análise comparativa de custos de sistemas estruturais para pavimentos de concreto armado*. 2002. 211f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002

SILVA, Marcos Alberto Ferreira da. *Projeto e construção de lajes nervuradas de concreto armado*. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos, 2005.

SILVA FILHO, J. J. H.; LOPES, M. I. P.; SOARES, J. M. *Análise experimental de lajes pré-moldadas*. In: V CONGRESSO DE ENGENHARIA CIVIL. Anais... Juiz de Fora: UFRJ; 2002.

SORIANO, H. L. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. São Paulo: Editora da cidade de São Paulo, 2003.

SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A. J. P. *Lajes em concreto armado e protendido*. Niterói: EDUFF, 1998.

STRAMANDINOLI, Renata Sá Brito. *Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado*. 2007. 209f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KIEGER, S. *Theory of plates and shells*. New York: McGraw Hill, 1959.

VASCONCELLOS, Juliano Caldas de. *Concreto Armado, Arquitetura Moderna, Escola carioca: levantamento e notas*. 2004. 310f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação e pesquisa em arquitetura) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2004.

WILLAM, K. J., WARNKE, E. D. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete. Proceedings, International. *Association for Bridge and Structural Engineering*. v. 19, ISMES, Bergamo, Itália, p. 174, 1974.

**APÊNDICE A – Deslocamentos obtidos para a laje S1 de Abdul-Wahab e Khalil
(2000)**

Força (kN)	Deslocamentos (mm)	Força (kN)	Deslocamentos (mm)
0,8000	0,0105	40,8000	1,0596
1,6000	0,0211	41,6000	1,0873
2,4000	0,0316	42,4000	1,1170
3,2000	0,0422	43,2000	1,1464
4,0000	0,0527	44,0000	1,1819
4,8000	0,0632	44,8000	1,2120
5,6000	0,0738	45,6000	1,2448
6,4000	0,0843	46,4000	1,2814
7,2000	0,0950	47,2000	1,3143
8,0000	0,1061	48,0000	1,3529
8,8000	0,1179	48,8000	1,3907
9,6000	0,1502	49,6000	1,4320
10,4000	0,1650	50,4000	1,5547
11,2000	0,1860	51,2000	1,6010
12,0000	0,2065	52,0000	1,6494
12,8000	0,2297	52,8000	1,7003
13,6000	0,2452	53,6000	1,7501
14,4000	0,2618	54,4000	1,8067
15,2000	0,2836	55,2000	1,8558
16,0000	0,3021	56,0000	1,9074
16,8000	0,3214	56,8000	1,9751
17,6000	0,3390	57,6000	2,0443
18,4000	0,3612	58,4000	2,1047
19,2000	0,3867	59,2000	2,1624
20,0000	0,4093	60,0000	2,2219
20,8000	0,4293	60,8000	2,2883
21,6000	0,4499	61,6000	2,3555
22,4000	0,4698	62,4000	2,4246
23,2000	0,4952	63,2000	2,5012
24,0000	0,5165	64,0000	2,5833
24,8000	0,5419	64,8000	2,6460
25,6000	0,5631	65,6000	2,7259
26,4000	0,5848	66,4000	2,8105
27,2000	0,6220	67,2000	2,8916
28,0000	0,6442	68,0000	3,0405
28,8000	0,6669	68,8000	3,1234
29,6000	0,6901	69,6000	3,2082
30,4000	0,7180	70,4000	3,3180
31,2000	0,7420	71,2000	3,4177
32,0000	0,7681	72,0000	3,5198
32,8000	0,7940	72,8000	3,6198
33,6000	0,8217	73,6000	3,7361
34,4000	0,8457	74,4000	3,8460
35,2000	0,8766	75,2000	3,9541
36,0000	0,9012	76,0000	4,0715
36,8000	0,9291	76,8000	4,2111
37,6000	0,9550	77,6000	4,3443
38,4000	0,9806	78,4000	4,4763
39,2000	1,0067	79,2000	4,6240
40,0000	1,0345	80,0000	4,7788

**APÊNDICE B – Deslocamentos obtidos para a laje S2 de Abdul-Wahab Khalil
(2000)**

Força (kN)	Deslocamentos (mm)			
	Malha de 7,5 cm	Malha de 5,2 cm	Malha de 3,47 cm	Malha de 2,6 cm
0,7500	0,0107	0,0110	0,0112	0,0113
1,5000	0,0213	0,0220	0,0225	0,0226
2,2500	0,0320	0,0331	0,0337	0,0339
3,0000	0,0426	0,0441	0,0450	0,0452
3,7500	0,0533	0,0551	0,0562	0,0565
4,5000	0,0639	0,0661	0,0674	0,0678
5,2500	0,0746	0,0772	0,0787	0,0791
6,0000	0,0852	0,0882	0,0899	0,0905
6,7500	0,0959	0,0992	0,1013	0,1019
7,5000	0,1066	0,1105	0,1131	0,1139
8,2500	0,1174	0,1221	0,1251	0,1518
9,0000	0,1285	0,1514	0,1649	0,1698
9,7500	0,1490	0,1862	0,1888	0,1870
10,5000	0,1613	0,2008	0,2061	0,2133
11,2500	0,1733	0,2171	0,2306	0,2314
12,0000	0,2225	0,2417	0,2487	0,2515
12,7500	0,2393	0,2611	0,2671	0,2719
13,5000	0,2555	0,2786	0,2917	0,2921
14,2500	0,2729	0,2961	0,3105	0,3130
15,0000	0,2941	0,3181	0,3288	0,3323
15,7500	0,3097	0,3361	0,3474	0,3520
16,5000	0,3253	0,3544	0,3664	0,3720
17,2500	0,3501	0,3757	0,3860	0,3955
18,0000	0,3677	0,3940	0,4187	0,4196
18,7500	0,3838	0,4262	0,4434	0,4444
19,5000	0,4005	0,4566	0,4697	0,4694
20,2500	0,4192	0,4834	0,4923	0,4929
21,0000	0,4583	0,5039	0,5163	0,5159
21,7500	0,4769	0,5286	0,5404	0,5406
22,5000	0,5005	0,5514	0,5634	0,5669
23,2500	0,5251	0,5749	0,5859	0,5961
24,0000	0,5461	0,5960	0,6117	0,6245
24,7500	0,5746	0,6279	0,6418	0,6529
25,5000	0,5970	0,6539	0,6644	0,6767
26,2500	0,6214	0,6760	0,6873	0,7022
27,0000	0,6435	0,7011	0,7136	0,7249
27,7500	0,6672	0,7237	0,7367	0,7493
28,5000	0,6878	0,7493	0,7651	0,7783
29,2500	0,7141	0,7762	0,7971	0,8095
30,0000	0,7403	0,8017	0,8208	0,8337
30,7500	0,7637	0,8263	0,8508	0,8698
31,5000	0,7875	0,8521	0,8804	0,8975
32,2500	0,8152	0,8913	0,9055	0,9250
33,0000	0,8436	0,9166	0,9372	0,9529
33,7500	0,8663	0,9426	0,9673	0,9934
34,5000	0,8924	0,9709	0,9969	1,0274
35,2500	0,9148	0,9989	1,0220	1,0569
36,0000	0,9435	1,0253	1,0533	1,0905
36,7500	0,9719	1,0542	1,0936	1,1223
37,5000	0,9956	1,0830	1,1258	1,1543

38,2500	1,0199	1,1186	1,1554	1,1864
39,0000	1,0441	1,1497	1,1894	1,2189
39,7500	1,0684	1,1845	1,2363	1,2514
40,5000	1,0947	1,2170	1,2663	1,2944
41,2500	1,1186	1,2471	1,2993	1,3384
42,0000	1,1424	1,2910	1,3516	1,3791
42,7500	1,1771	1,3256	1,3877	1,4146
43,5000	1,2058	1,3678	1,4240	1,4542
44,2500	1,2332	1,4010	1,4688	1,5081
45,0000	1,2586	1,4401	1,5135	1,5753
45,7500	1,2884	1,4823	1,5593	1,6900
46,5000	1,3213	1,6215	1,6679	1,7767
47,2500	1,3706	1,6827	1,7463	1,8256
48,0000	1,4204	1,7287	1,8020	1,8828
48,7500	1,4830	1,7837	1,8763	1,9391
49,5000	1,5283	1,8368	1,9559	2,0219
50,2500	1,5665	1,9028	2,0319	2,0814
51,0000	1,6071	1,9684	2,1278	2,1642
51,7500	1,6707	2,0220	2,1937	2,2395
52,5000	1,8789	2,0792	2,2563	2,3112
53,2500	1,9287	2,1438	2,3482	2,4019
54,0000	1,9758	2,2163	2,4277	2,5025
54,7500	2,0386	2,2862	2,5140	2,5938
55,5000	2,0897	2,3781	2,6033	2,6867
56,2500	2,1703	2,4741	2,7064	2,7983
57,0000	2,2163	2,5657	2,8128	2,9043
57,7500	2,2683	2,6349	2,9186	3,0094
58,5000	2,3381	2,7165	3,0126	3,1861
59,2500	2,4163	2,8067	3,1213	3,2801
60,0000	2,5029	2,8954	3,2161	3,3755
60,7500	2,5761	2,9740	3,3838	3,4967
61,5000	2,6467	3,0591	3,4894	3,6334
62,2500	2,7157	3,1698	3,5932	3,8014
63,0000	2,8428	3,2682	3,7287	3,9764
63,7500	2,9072	3,4582	3,8747	4,1122
64,5000	2,9951	3,5747	3,9939	4,2392
65,2500	3,0780	3,6911	4,1300	4,3853
66,0000	3,1573	3,7862	4,2746	4,5514
66,7500	3,2580	3,9155	4,4613	4,7554
67,5000	3,3438	4,0640	4,6709	4,9515
68,2500	3,5082	4,2114	4,9117	5,1585
69,0000	3,5959	4,4206	5,1329	5,3693
69,7500	3,6812	4,5953	5,3837	5,5990
70,5000	3,7912	4,7221	5,6147	5,8533
71,2500	3,8759	4,9212	5,8464	6,1188
72,0000	3,9874	5,1439	6,1212	6,3875
72,7500	4,0992	5,3717	6,4062	6,6933
73,5000	4,1976	5,6028	6,6995	7,0070
74,2500	4,3149	5,8073	6,9834	7,3619
75,0000	4,5024	6,0621	7,3287	7,7442

**APÊNDICE C – Deslocamentos obtidos para a laje S3 de Abdul-Wahab e Khalil
(2000)**

Força (kN)	Deslocamentos (mm)	Força (kN)	Deslocamentos (mm)
0,6000	0,0112	30,6000	1,2794
1,2000	0,0224	31,2000	1,3204
1,8000	0,0336	31,8000	1,3698
2,4000	0,0448	32,4000	1,4257
3,0000	0,0559	33,0000	1,4761
3,6000	0,0671	33,6000	1,5221
4,2000	0,0783	34,2000	1,5835
4,8000	0,0895	34,8000	1,7075
5,4000	0,1007	35,4000	1,7824
6,0000	0,1121	36,0000	1,8568
6,6000	0,1239	36,6000	1,9129
7,2000	0,1665	37,2000	1,9767
7,8000	0,1831	37,8000	2,0486
8,4000	0,2035	38,4000	2,2051
9,0000	0,2259	39,0000	2,2736
9,6000	0,2451	39,6000	2,3476
10,2000	0,2674	40,2000	2,4345
10,8000	0,2976	40,8000	2,5157
11,4000	0,3187	41,4000	2,5906
12,0000	0,3411	42,0000	2,6845
12,6000	0,3602	42,6000	2,8104
13,2000	0,3790	43,2000	2,9193
13,8000	0,4011	43,8000	3,0179
14,4000	0,4352	44,4000	3,1324
15,0000	0,4577	45,0000	3,2471
15,6000	0,4829	45,6000	3,3785
16,2000	0,5083	46,2000	3,4759
16,8000	0,5311	46,8000	3,5929
17,4000	0,5581	47,4000	3,7211
18,0000	0,592	48,0000	3,8345
18,6000	0,6212	48,6000	3,9667
19,2000	0,6457	49,2000	4,1072
19,8000	0,6699	49,8000	4,2576
20,4000	0,6956	50,4000	4,4059
21,0000	0,7218	51,0000	4,5717
21,6000	0,7500	51,6000	4,7616
22,2000	0,7755	52,2000	4,9349
22,8000	0,8005	52,8000	5,1590
23,4000	0,8317	53,4000	5,3845
24,0000	0,8615	54,0000	5,6248
24,6000	0,8857	54,6000	5,9086
25,2000	0,919	55,2000	6,2289
25,8000	0,9491	55,8000	6,5263
26,4000	0,9806	56,4000	6,7840
27,0000	1,0166	57,0000	7,1886
27,6000	1,0600	57,6000	7,6265
28,2000	1,097	58,2000	8,0242
28,8000	1,1414	58,8000	8,3377
29,4000	1,1779	59,4000	8,7801
30,0000	1,2261	60,0000	9,1936

**APÊNDICE D – Deslocamentos obtidos para a laje S4 de Abdul-Wahab e Khalil
(2000)**

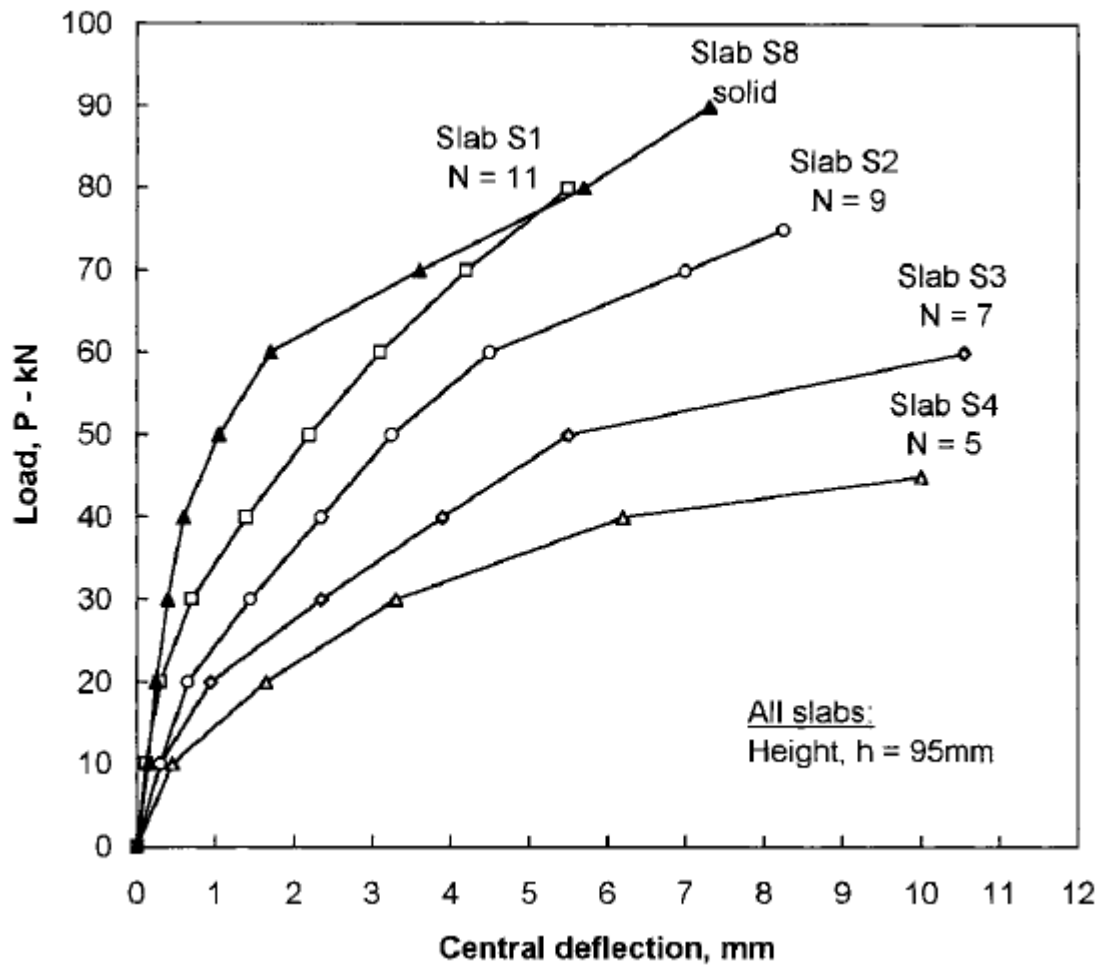
Força (kN)	Deslocamentos (mm)	Força (kN)	Deslocamentos (mm)
0,5000	0,0132	22,9500	1,4930
0,9000	0,0263	23,4000	1,5385
1,3500	0,0395	23,8500	1,5918
1,8000	0,0527	24,3000	1,6592
2,2500	0,0658	24,7500	1,7250
2,7000	0,0790	25,2000	1,7882
3,1500	0,0922	25,6500	1,8396
3,6000	0,1054	26,1000	1,9133
4,0500	0,1185	26,5500	2,0260
4,5000	0,1320	27,0000	2,0871
4,9500	0,1594	27,4500	2,1783
5,4000	0,1907	27,9000	2,2516
5,8500	0,2191	28,3500	2,3396
6,3000	0,2412	28,8000	2,4115
6,7500	0,2674	29,2500	2,5082
7,2000	0,2873	29,7000	2,6247
7,6500	0,3096	30,1500	2,7006
8,1000	0,3371	30,6000	2,7811
8,5500	0,3618	31,0500	2,8694
9,0000	0,3830	31,5000	2,9650
9,4500	0,4049	31,9500	3,0627
9,9000	0,4308	32,4000	3,1590
10,3500	0,4544	32,8500	3,2479
10,8000	0,4812	33,3000	3,3742
11,2500	0,5059	33,7500	3,5072
11,7000	0,5302	34,2000	3,6624
12,1500	0,5653	34,6500	3,7726
12,6000	0,5954	35,1000	3,8951
13,0500	0,6238	35,5500	4,0128
13,5000	0,6546	36,0000	4,1284
13,9500	0,6818	36,4500	4,2643
14,4000	0,7122	36,9000	4,4546
14,8500	0,7439	37,3500	4,6200
15,3000	0,7816	37,8000	4,7818
15,7500	0,8136	38,2500	4,9030
16,2000	0,8417	38,7000	5,0404
16,6500	0,8779	39,1500	5,2133
17,1000	0,9148	39,6000	5,3617
17,5500	0,9644	40,0500	5,5983
18,0000	0,9974	40,5000	5,7300
18,4500	1,0583	40,9500	5,9403
18,9000	1,1141	41,4000	6,2242
19,3500	1,1573	41,8500	6,4356
19,8000	1,2014	42,3000	6,7386
20,2500	1,2424	42,7500	7,0298
20,7000	1,2909	43,2000	7,3688
21,1500	1,3290	43,6500	7,7092
21,6000	1,3680	44,1000	8,0731
22,0500	1,4073	44,5500	8,4859
22,5000	1,4475	45,0000	8,9052

APÊNDICE E – Deslocamentos obtidos e momentos teóricos para a laje de Bastos (2016)

Carga (kN/m ²)	Momento (kN.m)	Deslocamentos (mm)			
		Malha de 6,0 cm	Malha de 5,0 cm	Malha de 2,5 cm	Malha de 2,0 cm
0,1028	0,0172	0,0046	0,0046	0,0048	0,0048
0,2056	0,0344	0,0091	0,0092	0,0095	0,0096
0,3084	0,0517	0,0137	0,0138	0,0143	0,0144
0,4112	0,0689	0,0183	0,0184	0,0191	0,0192
0,5140	0,0861	0,0228	0,0229	0,0239	0,0241
0,6168	0,1033	0,0274	0,0275	0,0286	0,0289
0,7196	0,1205	0,0320	0,0321	0,0334	0,0337
0,8224	0,1378	0,0366	0,0367	0,0382	0,0385
0,9252	0,1550	0,0411	0,0413	0,0430	0,0433
1,0280	0,1722	0,0457	0,0459	0,0477	0,0481
1,1308	0,1894	0,0503	0,0505	0,0525	0,0529
1,2336	0,2066	0,0548	0,0551	0,0573	0,0577
1,3364	0,2239	0,0594	0,0596	0,0621	0,0626
1,4392	0,2411	0,0640	0,0642	0,0668	0,0674
1,5420	0,2583	0,0685	0,0688	0,0716	0,0722
1,6448	0,2755	0,0731	0,0734	0,0764	0,0770
1,7476	0,2927	0,0777	0,0780	0,0812	0,0818
1,8504	0,3100	0,0823	0,0826	0,0859	0,0866
1,9532	0,3272	0,0868	0,0872	0,0907	0,0914
2,0560	0,3444	0,0914	0,0918	0,0955	0,0962
2,1588	0,3616	0,0960	0,0963	0,1003	0,1011
2,2616	0,3788	0,1005	0,1009	0,1050	0,1059
2,3644	0,3961	0,1051	0,1055	0,1098	0,1107
2,4672	0,4133	0,1097	0,1101	0,1146	0,1155
2,5700	0,4305	0,1142	0,1147	0,1194	0,1203
2,6728	0,4477	0,1188	0,1193	0,1241	0,1251
2,7756	0,4649	0,1234	0,1239	0,1289	0,1299
2,8784	0,4822	0,1280	0,1285	0,1337	0,1347
2,9812	0,4994	0,1325	0,1331	0,1385	0,1396
3,0840	0,5166	0,1371	0,1376	0,1432	0,1444
3,1868	0,5338	0,1417	0,1422	0,1480	0,1492
3,2896	0,5510	0,1462	0,1468	0,1528	0,1540
3,3924	0,5683	0,1508	0,1514	0,1576	0,1588
3,4952	0,5855	0,1554	0,1560	0,1623	0,1636
3,5980	0,6027	0,1599	0,1606	0,1671	0,1684
3,7008	0,6199	0,1645	0,1652	0,1719	0,1732
3,8036	0,6371	0,1691	0,1698	0,1767	0,1780
3,9064	0,6544	0,1736	0,1743	0,1814	0,1829
4,0092	0,6716	0,1782	0,1789	0,1862	0,1877
4,1120	0,6888	0,1828	0,1835	0,1910	0,1925
4,2148	0,7060	0,1874	0,1881	0,1958	0,1973
4,3176	0,7233	0,1919	0,1927	0,2005	0,2021
4,4204	0,7405	0,1965	0,1973	0,2053	0,2069
4,5232	0,7577	0,2011	0,2019	0,2101	0,2117
4,6260	0,7749	0,2056	0,2065	0,2149	0,2166
4,7288	0,7921	0,2102	0,2111	0,2197	0,2214
4,8316	0,8094	0,2148	0,2156	0,2244	0,2262
4,9344	0,8266	0,2193	0,2202	0,2292	0,2313
5,0372	0,8438	0,2239	0,2248	0,2340	0,2366
5,1400	0,8610	0,2285	0,2294	0,2388	0,2414

5,2428	0,8782	0,2331	0,2340	0,2436	0,2463
5,3456	0,8955	0,2376	0,2386	0,2491	0,2512
5,4484	0,9127	0,2422	0,2432	0,2539	0,2561
5,5512	0,9299	0,2468	0,2478	0,2588	0,3023
5,6540	0,9471	0,2513	0,2523	0,2636	0,3081
5,7568	0,9643	0,2559	0,2569	0,2684	0,3143
5,8596	0,9816	0,2605	0,2615	0,2734	0,3218
5,9624	0,9988	0,2650	0,2661	0,2825	0,3282
6,0652	1,0160	0,2696	0,2707	0,2880	0,3343
6,1680	1,0332	0,2742	0,2753	0,2937	0,3404
6,2708	1,0504	0,2788	0,2799	0,3385	0,3519
6,3736	1,0677	0,2833	0,2845	0,3456	0,3599
6,4764	1,0849	0,2879	0,2891	0,3529	0,3679
6,5792	1,1021	0,2925	0,2937	0,3587	0,3756
6,6820	1,1193	0,2971	0,2983	0,3646	0,3826
6,7848	1,1365	0,3490	0,3547	0,3708	0,3896
6,8876	1,1538	0,3543	0,3604	0,3772	0,3965
6,9904	1,1710	0,3596	0,3658	0,3846	0,4033
7,0932	1,1882	0,3649	0,3712	0,3934	0,4102
7,1960	1,2054	0,3702	0,3766	0,4191	0,4168
7,2988	1,2226	0,3760	0,3820	0,4278	0,4245
7,4016	1,2399	0,3868	0,3874	0,4344	0,4425
7,5044	1,2571	0,3922	0,3928	0,4410	0,4506
7,6072	1,2743	0,3976	0,3982	0,4476	0,4602
7,7100	1,2915	0,4030	0,4036	0,4548	0,4687
7,8128	1,3087	0,4084	0,4091	0,4612	0,5243
7,9156	1,3260	0,4137	0,4145	0,4681	0,5356
8,0184	1,3432	0,4191	0,4199	0,4766	0,5452
8,1212	1,3604	0,4245	0,4253	0,4872	0,5546
8,2240	1,3776	0,4299	0,4307	0,4999	0,5630
8,3268	1,3948	0,4353	0,4361	0,5081	0,5721
8,4296	1,4121	0,4407	0,4415	0,5175	0,5803
8,5324	1,4293	0,4461	0,4469	0,5268	0,5903
8,6352	1,4465	0,4515	0,4523	0,5762	0,6004
8,7380	1,4637	0,4570	0,4577	0,5861	0,6125
8,8408	1,4809	0,4625	0,4632	0,5942	0,6277
8,9436	1,4982	0,4679	0,4686	0,6044	0,6381
9,0464	1,5154	0,4733	0,4740	0,6177	0,6497
9,1492	1,5326	0,4787	0,4794	0,6279	0,6651
9,2520	1,5498	0,4843	0,4848	0,6373	0,6771
9,3548	1,5670	0,4897	0,4903	0,6453	0,6903
9,4576	1,5843	0,4951	0,4962	0,6539	0,7008
9,5604	1,6015	0,5006	0,5017	0,6634	0,7118
9,6632	1,6187	0,5061	0,5071	0,6734	0,7227
9,7660	1,6359	0,5118	0,5125	0,6836	0,7327
9,8688	1,6531	0,5175	0,5180	0,6918	0,7426
9,9716	1,6704	0,5235	0,5234	0,7010	0,7534
10,0744	1,6876	0,5300	0,5289	0,7114	0,7638
10,1772	1,7048	0,5346	0,5374	0,7210	0,7739
10,2800	1,7220	0,5412	0,5480	0,7301	0,7833

ANEXO A – Deslocamentos experimentais para as lajes de Abdul-Wahab e Khalil (2000)



ANEXO B – Resultados teóricos e experimentais obtidos por Bastos (2016)

Carga (kN/m ²)	Momento (kN.m)	Deslocamentos (mm)	
		Experimental	Teórico
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,2877	0,2157	0,0800	0,0500
1,3877	0,2325	0,0800	0,0500
1,4877	0,2492	0,0800	0,0600
1,5877	0,2660	0,0800	0,0600
1,6877	0,2827	0,0800	0,0700
1,7877	0,2995	0,0800	0,0700
1,8877	0,3162	0,1000	0,0700
1,9877	0,3330	0,1100	0,0800
2,0877	0,3497	0,1100	0,0800
2,1877	0,3665	0,1200	0,0800
2,2877	0,3832	0,1200	0,0900
2,3877	0,4000	0,1300	0,0900
2,4877	0,4167	0,1300	0,1000
2,5877	0,4335	0,1400	0,1000
2,6877	0,4502	0,1400	0,1000
2,7877	0,4670	0,1500	0,1100
2,8877	0,4837	0,1500	0,1100
2,9877	0,5005	0,1600	0,1200
3,0877	0,5172	0,1600	0,1200
3,1877	0,5340	0,1600	0,1200
3,2877	0,5507	0,1700	0,1500
3,3877	0,5675	0,1700	0,1700
3,4877	0,5842	0,1800	0,1900
3,5877	0,6010	0,1800	0,2100
3,6877	0,6177	0,1800	0,2300
3,7877	0,6345	0,1900	0,2600
3,8877	0,6512	0,2000	0,2800
3,9877	0,6680	0,2000	0,3100
4,0877	0,6847	0,2100	0,3400
4,1877	0,7015	0,2100	0,3700
4,2877	0,7182	0,2200	0,4100
4,3877	0,7350	0,2200	0,4500
4,4877	0,7517	0,2300	0,4800
4,5877	0,7685	0,2400	0,5300
4,6877	0,7852	0,2500	0,5700
4,7877	0,8020	0,2500	0,6100
4,8877	0,8187	0,2600	0,6600
4,9877	0,8355	0,2700	0,7100
5,0877	0,8523	0,2800	0,7600
5,1877	0,8690	0,2800	0,8200
5,2877	0,8858	0,2900	0,8800
5,3877	0,9025	0,3000	0,9400
5,4877	0,9193	0,3000	1,0000
5,5877	0,9360	0,3100	1,0600
5,6877	0,9528	0,3200	1,1300
5,7877	0,9695	0,3300	1,2000
5,8877	0,9863	0,3400	1,2700
5,9877	1,0030	0,3500	1,3400
6,0877	1,0198	0,3600	1,4200
6,1877	1,0365	0,3700	1,5000
6,2877	1,0533	0,3800	1,5800
6,3877	1,0700	0,3900	1,6600

6,4877	1,0868	0,4000	1,7500
6,5877	1,1035	0,4100	1,8300
6,6877	1,1203	0,4200	1,9200
6,7877	1,1370	0,4300	2,0200
6,8877	1,1538	0,4400	2,1100
6,9877	1,1705	0,4600	2,2100
7,0877	1,1873	0,4700	2,3100
7,1877	1,2040	0,4800	2,4100
7,2877	1,2208	0,4900	2,5100
7,3877	1,2375	0,5000	2,6100
7,4877	1,2543	0,5100	2,7200
7,5877	1,2710	0,5200	2,8300
7,6877	1,2878	0,5300	2,9400
7,7877	1,3045	0,5500	3,0500
7,8877	1,3213	0,5600	3,1600
7,9877	1,3380	0,5800	3,2700
8,0877	1,3548	0,5900	3,3900
8,1877	1,3715	0,6000	3,5100
8,2877	1,3883	0,6200	3,6300
8,3877	1,4050	0,6300	3,7500
8,4877	1,4218	0,6500	3,8700
8,5877	1,4385	0,6600	3,9900
8,6877	1,4553	0,6900	4,1100
8,7877	1,4720	0,7000	4,2400
8,8877	1,4888	0,7100	4,3600
8,9877	1,5055	0,7200	4,4900
9,0877	1,5223	0,7400	4,6200
9,1877	1,5391	0,7500	4,7500
9,2877	1,5558	0,7600	4,8800
9,3877	1,5726	0,7900	5,0100
9,4877	1,5893	0,8000	5,1400
9,5877	1,6061	0,8100	5,2700
9,6877	1,6228	0,8200	5,4000
9,7877	1,6396	0,8300	5,5300
9,8877	1,6563	0,8400	5,6700
9,9877	1,6731	0,8700	5,8000
10,0877	1,6898	0,8800	5,9400
10,1877	1,7066	0,8900	6,0700
10,2877	1,7233	0,9100	6,2100