

**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

Rafael Ozório Moreira

**CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO DO DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE  
EQUILÍBRIO EM CONCRETO ARMADO**

Santa Cruz do Sul

2017

Rafael Ozório Moreira

**CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO DO DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE  
EQUILÍBRIO EM CONCRETO ARMADO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Engenharia Civil da Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC para a obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. M.Sc. Christian Donin

Santa Cruz do Sul

2017

Rafael Ozório Moreira

**CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO DO DIMENSIONAMENTO DE  
VIGAS DE EQUILÍBRIO EM CONCRETO ARMADO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Engenharia Civil da Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC para a obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. M.Sc. Christian Donin



Prof. M.Sc. Christian Donin  
Professor Orientador - UNISC



Prof. Dr. Eduardo Rizzatti  
Professor Examinador - UFSM



Prof. M.Sc. Henrique Luiz Rupp  
Professor Examinador - UNISC

Santa Cruz do Sul

2017

## RESUMO

Embora não seja usada em todos os tipos de edificações, para solucionar problemas de divisa de terrenos a viga de equilíbrio pode ser uma boa solução estrutural para adequar o projeto arquitetônico aos limites do terreno. Desta maneira, este trabalho tem como propósito realizar uma análise através dos esforços presentes em uma estrutura composta por viga de equilíbrio. Abordando análises, dimensionamentos e métodos construtivos abordados pela NBR 6118:2014, onde esta recomenda que para este tipo de viga sejam levadas em conta abordagens feitas pela NBR 9062:2017 para consolo de concreto, aplicando estas normas no método de Andrade e método de Burke

Através deste trabalho foi possível concluir que a inclinação da biela comprimida é a variável que mais influencia no dimensionamento da viga de equilíbrio. Onde a dimensão que mais contribui para isso é a altura da peça. Estas alterações na seção da viga, além de aumentar a resistência do concreto a compressão também ajuda a reduzir a área de aço do tirante tracionado.

Pode-se perceber que independente dos métodos empregados, não há grande diferenças no dimensionamento deste tipo de estrutura, onde se diferencia somente o dimensionamento da área do tirante.

## **ABSTRACT**

Although not used in all kinds of changes, to solve land currency problems, you can use a good structural solution for the architectural design at the boundaries of the terrain. In this way, this work aims to carry out an analysis through the costs in a structure composed by equilibrium beam. In order to analyze the dimensions, dimensions and construction methods of NBR 6118: 2014, it is recommended that this type of beam be considered and approaches to NBR 9062: 2017 be used for concrete soles, not applying Andrade's method and Burke's method.

The objective of this work was to conclude that the inclination of the compressed rod is a variable that has more influence on the design of the equilibrium beam. Where the dimension that most contributes to this is a height of the piece. These in the beam section, in addition to increasing the strength of the concrete the compression also helps to reduce the steel area of the pulled rod.

It can be noticed that, regardless of the methods employed, there is no great difference without designing the type of structure, where the size of the rod area is different.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<i>Figura 1 - Vão Efetivo</i>	11
<i>Figura 2 - Exemplos de sapatas (a) centradas e (b) excêntricas</i>	13
<i>Figura 3- Princípio de funcionamento da viga de equilíbrio.</i>	15
<i>Figura 4- Viga de equilíbrio em situações especiais.</i>	16
<i>Figura 5- Viga de equilíbrio.</i>	17
<i>Figura 6- Esquema de cálculo da viga de equilíbrio.</i>	18
<i>Figura 7- Dimensões de <math>B_1</math> e <math>B_2</math>.</i>	20
<i>Figura 8- Sistema de equilíbrio da viga de equilíbrio.</i>	21
<i>Figura 9- Desempenho resistente de uma viga biapoiada.</i>	24
<i>Figura 10- Distribuição da armadura de pele.</i>	27
<i>Figura 11- Espaçamentos mínimos entre barras.</i>	28
<i>Figura 12- Diagrama parábola-retângulo e retangular simplificado, para dissipação de tensões de compressão em concretos do grupo I.</i>	30
<i>Figura 13 - Seções onde a linha neutra não reduz em relação a borda comprimida.</i>	30
<i>Figura 14- Seções onde a linha neutra reduz em relação a borda comprimida.</i>	31
<i>Figura 15- Dissipação de tensões e deformações em viga retangular com armadura simples.</i>	32
<i>Figura 16- Mecanismos de transmissão de força cortante em vigas com estribos.</i>	35
<i>Figura 17- Ação de arco.</i>	36
<i>Figura 18- Exemplos onde ocorre ação de pino.</i>	38
<i>Figura 19- Modos de ruptura por ação de pino.</i>	38
<i>Figura 20- Desempenho de estribos no modelo de treliça.</i>	41
<i>Figura 21- Analogia da treliça clássica na proximidade dos apoios.</i>	42
<i>Figura 22- Viga configurada de acordo com a treliça clássica de Ritter-Mörsch.</i>	43
<i>Figura 23 - Resistência à força cortante da armadura transversal <math>A_{sw}</math>.</i>	44
<i>Figura 24 - Área de aço (<math>A_{sw}</math>) de estribos de três e quatro ramos.</i>	49
<i>Figura 25- Tipos de ganchos para estribos.</i>	53
<i>Figura 26 - Modelo biela-tirante para consolo.</i>	54
<i>Figura 27 - Viga de equilíbrio com força direta</i>	55
<i>Figura 28 - Analogia de treliça</i>	56
<i>Figura 29 - Triângulo das forças internas da viga.</i>	57
<i>Figura 30 - Representação do método biela-tirante.</i>	58
<i>Figura 31 – Viga de equilíbrio em planta.</i>	59
<i>Figura 32 – Estrutura com respectivas cargas.</i>	60
<i>Figura 33 – Esquema estático.</i>	60
<i>Figura 34 – Deslocamento, esforço cortante e momentos fletores da estrutura.</i>	61
<i>Figura 35 – Triângulos de forças.</i>	61
<i>Figura 36 - Arredondamento de momentos fletores.</i>	64
<i>Figura 37 - Detalhamento completo da viga.</i>	70
<i>Figura 38 - Detalhamento das armaduras.</i>	71
<i>Figura 39 – Força de tração por camada de tirante.</i>	74

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b> .....	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b> .....	<b>9</b>
<b>2.1</b>	<b>Objetivos gerais</b> .....	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b> .....	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>10</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>10</b>
<b>3.2</b>	<b>Vigas</b> .....	<b>10</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Vãos teóricos em vigas</b> .....	<b>11</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Cargas nas vigas dos edifícios</b> .....	<b>11</b>
<b>3.3</b>	<b>Excentricidades de sapatas</b> .....	<b>12</b>
<b>3.4</b>	<b>Vigas de equilíbrio</b> .....	<b>14</b>
<b>3.4.1</b>	<b>Sapata integrada à viga de equilíbrio</b> .....	<b>17</b>
<b>3.5</b>	<b>Flexão</b> .....	<b>22</b>
<b>3.5.1</b>	<b>Comportamento resistente de vigas sob flexão simples</b> .....	<b>22</b>
<b>3.6</b>	<b>Disposições construtivas</b> .....	<b>25</b>
<b>3.6.1</b>	<b>Armaduras longitudinais máximas e mínimas</b> .....	<b>25</b>
<b>3.6.2</b>	<b>Armadura de pele</b> .....	<b>26</b>
<b>3.6.3</b>	<b>Espaçamento entre barras longitudinais</b> .....	<b>27</b>
<b>3.6.4</b>	<b>Hipóteses básicas</b> .....	<b>28</b>
<b>3.7</b>	<b>Seção retangular com armadura simples</b> .....	<b>31</b>
<b>3.7.1</b>	<b>Equações de equilíbrio</b> .....	<b>31</b>
<b>3.8</b>	<b>Cortante</b> .....	<b>35</b>
<b>3.8.1</b>	<b>Mecanismos básicos de transmissão da força cortante</b> .....	<b>35</b>
<b>3.8.2</b>	<b>Fatores que influenciam a resistência à força cortante</b> .....	<b>39</b>
<b>3.9</b>	<b>Comportamento de vigas com armadura transversal</b> .....	<b>40</b>
<b>3.10</b>	<b>Treliça clássica de Ritter-Mörsch (<math>\theta=45^\circ</math>)</b> .....	<b>42</b>
<b>3.11</b>	<b>Dimensionamento segundo NBR 6118:2014</b> .....	<b>45</b>
<b>3.11.1</b>	<b>Modelo de cálculo I</b> .....	<b>45</b>
<b>3.12</b>	<b>Disposições construtivas</b> .....	<b>50</b>
<b>3.12.1</b>	<b>Armadura mínima</b> .....	<b>50</b>

3.12.2	Diâmetro do estribo.....	51
3.13	Efeito console .....	53
3.14	Alguns Estudos Sobre Vigas de Equilíbrio .....	55
4	METODOLOGIA.....	59
4.1	Modelo de aplicação.....	59
4.1.1	Dimensionamento da armadura do consolo .....	61
4.1.2	Armadura de costura para consolo curto .....	63
4.1.3	Armadura Fora do Console .....	64
4.1.4	Armadura Mínima .....	65
4.1.5	Armadura de Pele .....	65
4.1.6	Armadura Transversal.....	66
4.2	Método de burke .....	72
4.3	Considerações quanto aos métodos estudados .....	74
5	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	75
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	76

## 1 JUSTIFICATIVA

O projeto estrutural é a parte mais importante de uma edificação, visto que, este visa evitar o colapso e deformação da construção respeitando o projeto arquitetônico e a técnica construtiva mais viável economicamente. A viga de equilíbrio visa se adaptar a estes parâmetros.

Frequentemente nas edificações tem-se pilares em paredes de divisa da construção, no entanto a impossibilidade de haver elementos de fundação centrados com estes pilares resulta no aumento destes elementos, que em muitos casos resultam em inviabilidade econômica ou impossibilidade de execução. Sendo as vigas de equilíbrio uma boa solução quando há ocorrência de pilares de divisa de terrenos, uma vez que, estes têm uma excentricidade em relação ao elemento de fundação (sapata ou estaca). Este tipo de viga, equilibra o momento gerado pela excentricidade, ligando a estrutura de divisa a estrutura interna.

Além disso, as vigas de equilíbrio também são encontradas quando são submetidas a grandes cargas, provenientes de pilares, por exemplo, próximo a seus apoios. Isto pode ser visto quando há diminuição do número de pilares de um pavimento para outro.

Este estudo também é importante, já que, em programas de cálculos estruturais normalmente esta viga é analisada pelo software como uma viga convencional, o que é extremamente equivocado. Este tipo de estrutura, na área que compreende o pilar e o elemento de fundação deve ser tratado como um consolo de concreto que tem o dimensionamento diferente de uma viga normal.

Como se trata de uma viga que não recebe esforços provenientes somente de lajes, pretendo compreender e analisar o método de cálculo e dimensionamento deste elemento estrutural.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivos gerais**

Contribuir para o estudo de vigas de equilíbrio por meio de cálculos e análises os diversos casos de emprego.

### **2.2 Objetivos Específicos**

- Analisar os tipos de viga de equilíbrio e seu emprego;
- Analisar o comportamento de vigas de concreto armado sujeitas aos esforços provenientes de diferentes tipos de cargas
- Estudar a distribuição de esforços na estrutura e aplicar um modelo de biela e tirante que englobe este tipo de viga conforme proposto por Andrade e Burke;
- Analisar qual o método é mais vantajoso para a estrutura estudada.
- Comparar os métodos de Andrade e Burke;
- Desenvolver o projeto de uma viga de equilíbrio apresentando o detalhamento padrão que deve ser empregado em vigas de equilíbrio, considerando o comportamento específico para este tipo de viga.

### **3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

#### **3.1 Introdução**

O concreto simples é formado por cimento, água e agregado graúdo e miúdo, em alguns casos há a adição de aditivos ou são acrescentados minerais, para melhorar as características do concreto. Em virtude, da resistência à tração do concreto ser baixa (aproximadamente 10% da resistência à compressão), as barras de aço exercem a função de absorver os esforços de tração da estrutura (ARAÚJO, 2014).

O funcionamento deste sistema só é possível graças a aderência entre os dois materiais. Devido à aderência, as deformações deles são praticamente iguais. O concreto tem sua fissuração na zona de tração, onde os esforços de tração passam a ser absorvidos pela armadura (ARAÚJO, 2014).

O concreto não serve somente para resistir os esforços de compressão, serve também para proteger o aço dos agentes corrosivos. A estrutura de concreto sempre tem um revestimento mínimo necessário para proteger a armadura da corrosão, que varia de acordo com agressividade do meio (ARAÚJO, 2014).

#### **3.2 Vigas**

Vigas são consideradas, conforme NBR 6118:2014, como "elementos lineares em que a flexão é predominante". Vigas transferem seu carregamento para pilares, quando apoiadas neles. Estas cargas são provenientes normalmente de lajes, outras vigas ou paredes apoiadas nela. Estes esforços podem ser pontuais ou distribuídos ao longo da barra, o que ocasiona na compressão na parte superior da peça e na tração na parte inferior.

Vigas com pequeno comprimento de vão e com altas cargas perto de seus apoios tendem a sofrer com esforços cisalhantes (ou corte), que são mais críticos que os momentos fletores (CHING, 2010).

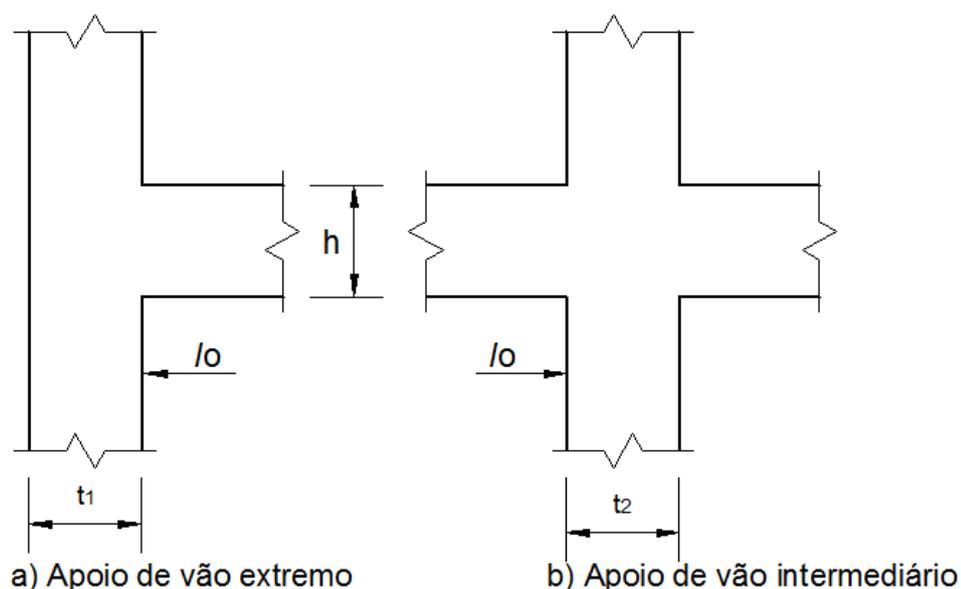
### 3.2.1 Vãos teóricos em vigas

A distância entre os centros dos apoios das vigas chama-se vão teórico. De acordo com a NBR 6118:2014, não há necessidade de adotar valores maiores que os seguintes:

- em viga biapoiada: o vão livre  $l_0$  mais 60% da altura da seção da viga;
- em vão de viga contínua: o vão livre  $l_0$  mais 60% da altura da seção da viga adotada.

Usando estas medidas, tem-se uma significativa economia no caso de haver apoios largos. Caso os apoios sejam curtos adotar a distância do vão entre o centro deles.

**Figura 1 - Vão Efetivo**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em NBR 6118:2014.

### 3.2.2 Cargas nas vigas dos edifícios

Os elementos estruturais de uma edificação são ligados como um sistema de pórticos espaciais em conjunto com as lajes, se repetindo ao longo dos pavimentos.

Pode ser considerado como uma estrutura tridimensional com elementos lineares e planos.

Se for considerada como tridimensional a estrutura, os cálculos são muito trabalhosos e normalmente desnecessários, por conta das diversas incertezas referentes ao carregamento, condições de apoio, rigidez dos elementos componentes, comportamento dos nós, etc. Por estes motivos são introduzidas simplificações no projeto estrutural, a fim de reduzir o número de cálculos e variáveis. Como desmembrar os pórticos espaciais em vários pórticos planos. Ainda podendo separar os pórticos planos em vigas e pilares, que é o modelo tradicional de cálculo. Onde são calculados os esforços solicitantes separadamente da laje para a viga e para os pilares da edificação. Devem ser considerados os fatores de segurança conforme NBR 6118:2014 (ARAÚJO, 2014).

### 3.3 Excentricidades de sapatas

Uma sapata é centrada quando o carregamento passa pelo centro de gravidade da área da sapata. As excentricidades ocorrem comumente em divisas de terreno, o que acarreta em uma força de flexão no pilar. Nas figuras 1.a pode se ver um exemplo de sapata centrada e nas figuras 1.b pode-se ver uma sapata excêntrica (LOPES E VELLOSO, 2012).

Segundo NBR 6122:1996, sempre que há pilares em divisas com sapatas, deve ser usado vigas de equilíbrio para eliminar essa excentricidade.

A NBR 6122:1986 estabelecia, que para outras situações que não a acima, uma fundação com excentricidade deveria respeitar as seguintes recomendações.

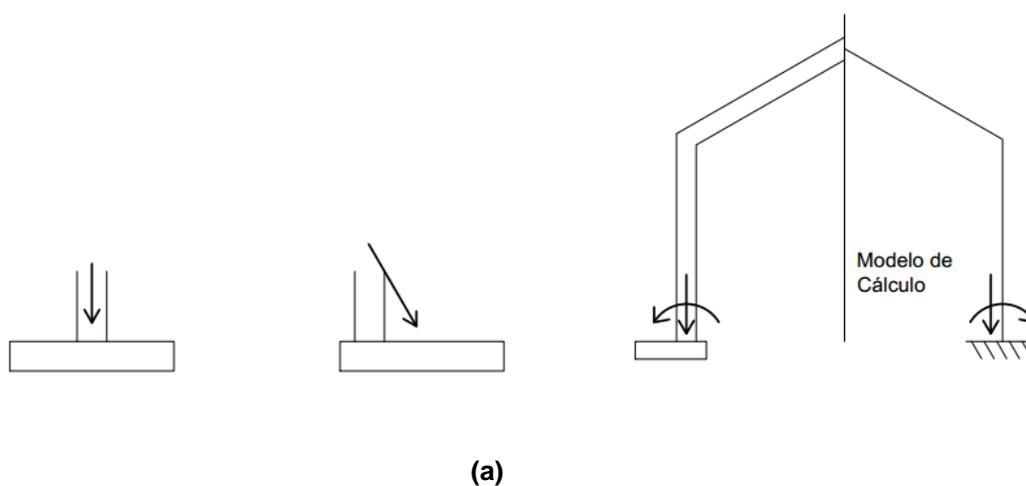
A resultante das cargas permanentes deve passar pelo centro da base da fundação. O centro de gravidade da fundação deve ficar na zona comprimida, isto faz com que a resultante das cargas totais seja limitada, considerando que não haja força de tração entre o solo e a fundação. Caso se trate de uma de uma fundação retangular de dimensões  $a$  e  $b$ , as excentricidades  $\mu$  e  $\nu$ , medidas paralelamente a  $a$  e  $b$ , respectivamente, devem atender à condição (LOPES E VELLOSO, 2012):

$$\left(\frac{\mu}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 \leq \frac{1}{9} \quad (1)$$

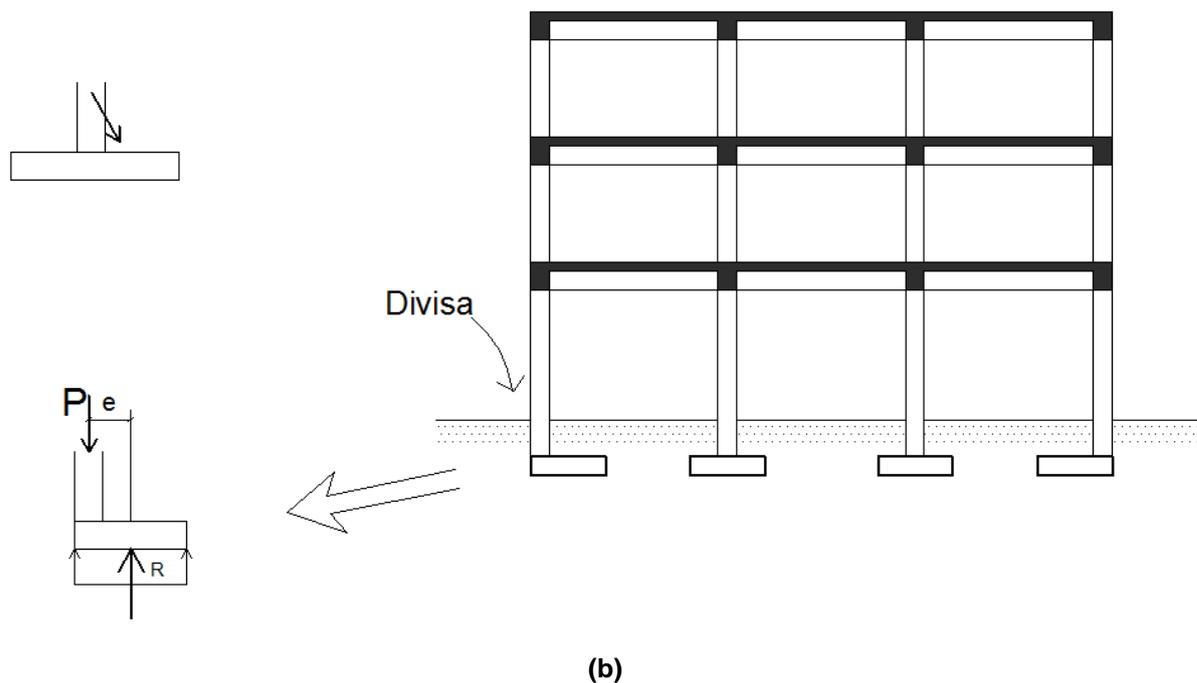
Caso se tratar de uma fundação circular de raio  $r$ :  $e \leq 0,59r$ .

A NBR 6122:1996 eliminou essas exigências, quando começou a usar o conceito de área efetiva. Entretanto, vários autores acham que a limitação da excentricidade é recomendável e prudente, mesmo adotando o conceito de área efetiva. A NBR 6122:2010 não fala sobre o assunto (LOPES E VELLOSO, 2012).

**Figura 2 - Exemplos de sapatas (a) centradas e (b) excêntricas**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Lopes e Velloso (2012).

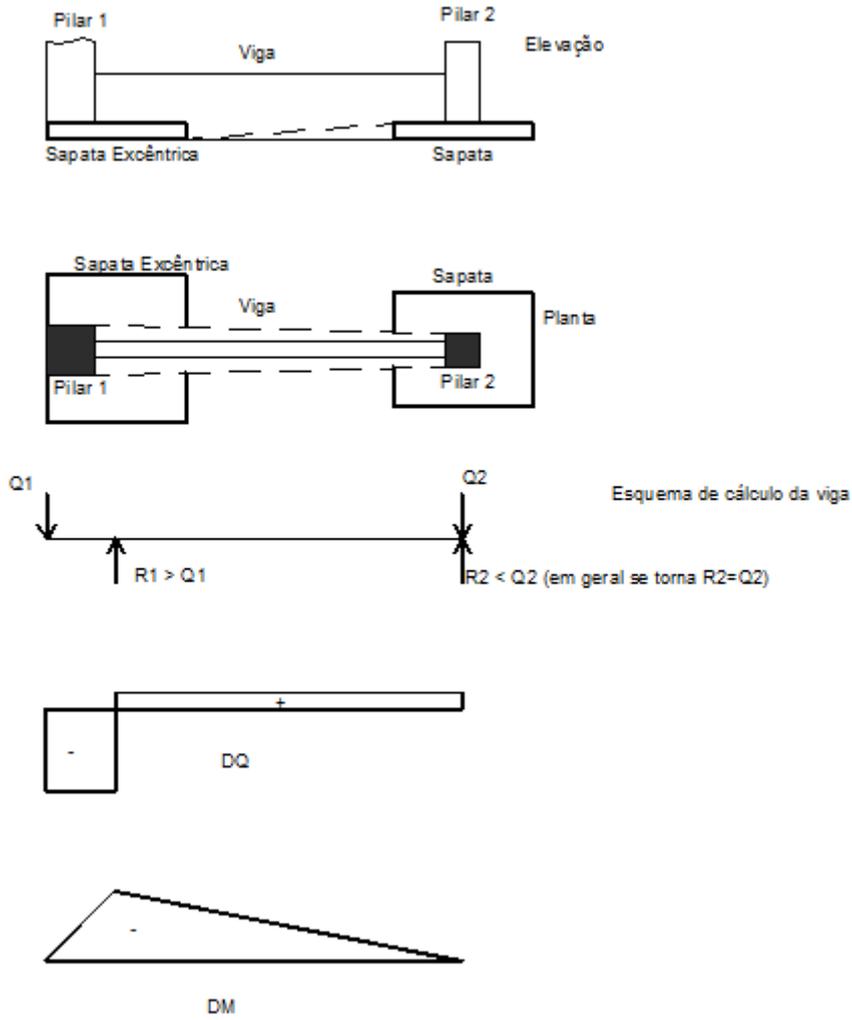


Fonte: Adaptado pelo autor com base em Lopes e Velloso (2012).

### 3.4 Vigas de equilíbrio

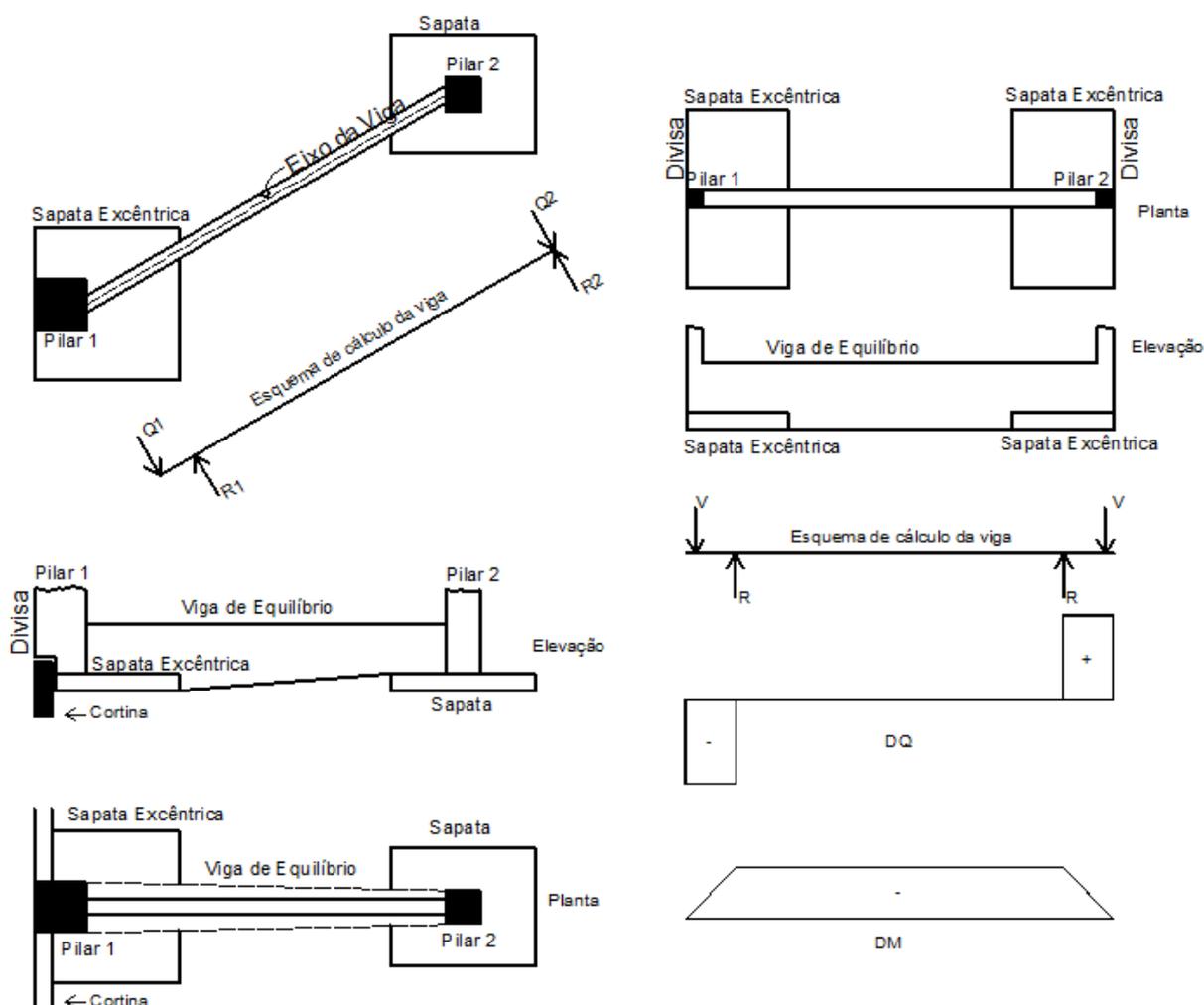
As vigas de equilíbrio servem para ligar um pilar de divisa a um pilar interno da construção, fazendo com que a carga da sapata trabalhe de forma excêntrica. Na prática de projeto, são comuns as complicações construtivas. O pilar no interior da obra pode não estar alinhado com o pilar de divisa. Às vezes, por conta de cortinas de escoramento as sapatas devem se afastar mais da divisa, pode acontecer também, de só haverem pilares de divisas em virtude ao tamanho do terreno (LOPES E VELLOSO, 2012).

**Figura 3- Princípio de funcionamento da viga de equilíbrio.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Lopes e Velloso (2012).

**Figura 4- Viga de equilíbrio em situações especiais.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Lopes e Velloso (2012).

Segundo Campos (2015), podem haver duas soluções para vigas de equilíbrio:

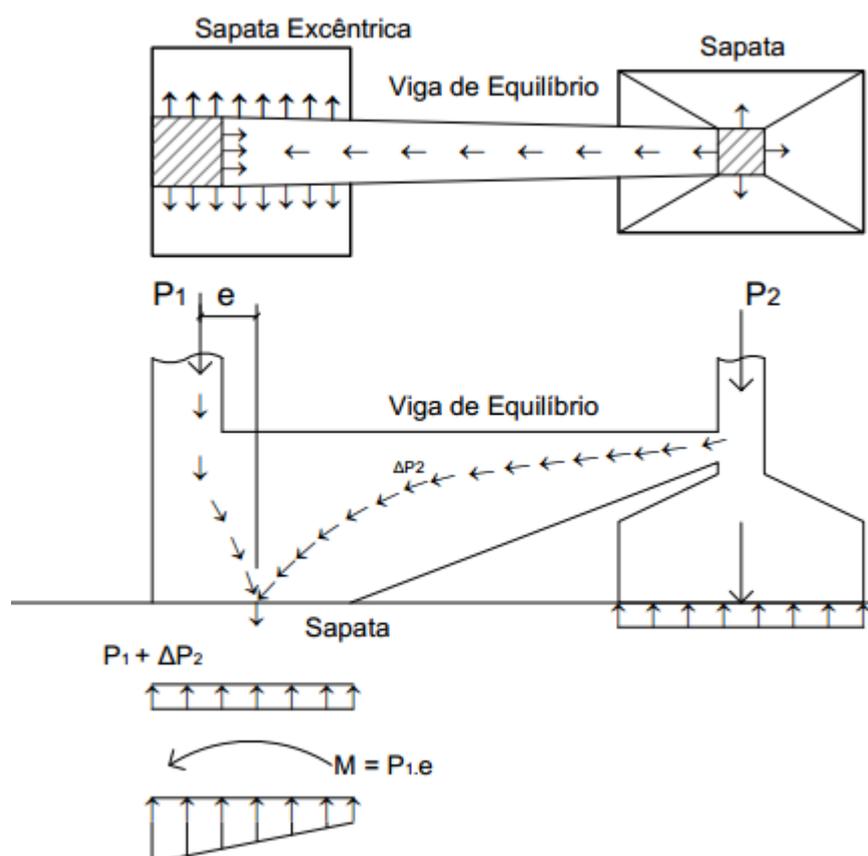
- a) A sapata ser integrada à viga de equilíbrio, cuja intenção é alavancar a carga, levantando-a para que desça para a fundação por meio da sapata.
- b) A sapata não ser integrada à viga de equilíbrio, que nessa situação pode ser considerada viga de transição, cuja finalidade também é alavancar a carga, transportando-a para que desça a fundação através de uma sapata isolada, com carga centrada.

A viga, por sua vez, será dimensionada e calculada como viga em balanço, requerendo de altura e rigidez aceitáveis para suportar o momento e tensões tangenciais, bem como diminuir as deformações em balanço (CAMPOS, 2015).

### 3.4.1 Sapata integrada à viga de equilíbrio

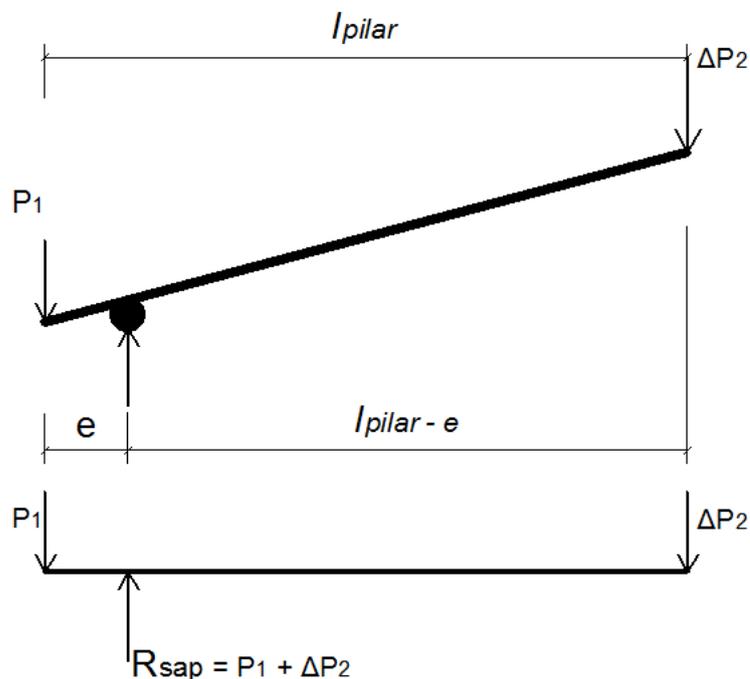
Os esquemas de cálculo, caminhamento e carregamento de carga da viga de equilíbrio estão apresentados na Fig. 5.

**Figura 5- Viga de equilíbrio.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Campos (2015).

**Figura 6- Esquema de cálculo da viga de equilíbrio.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Campos (2015).

### 3.4.1.1 Sistema de cálculo: alavanca e equilíbrio estático

Do equilíbrio externo, determina-se  $\Delta P_2$ :

$$\sum MCG, sap = 0 \therefore P_1 \cdot e - \Delta P_2 (lpilares - e) = 0$$

$$\Delta P_2 = \frac{P_1 \cdot e}{(lpilares - e)} \quad (2)$$

De acordo com Campos (2015), para o dimensionamento de uma sapata de  $P_2$  usa-se a carta  $(P_2 - \Delta P_2 / 2)$  em benefício da segurança. O item 5.7 da NBR 6122:2010 indica que, quando haver uma redução de carga pela viga de equilíbrio, para o dimensionamento deve ser considerada apenas 50% dessa redução para a fundação aliviada.

Essa suposição se justifica no fato de que as tensões distribuídas no solo (na sapata de divisa), dependendo da rigidez do solo e da viga de equilíbrio, podem não ser uniformes. Nesse caso a carga de  $P_2$ , com alívio total  $(P_2 - \Delta P_2)$ , fica contra a segurança, já que  $\Delta P_2$  real é menor que a  $\Delta P_2$  que se adotou.

Cabe, contudo, observar que, quando:

$$\frac{G1+Q1}{2} > G1 \rightarrow \Delta P_2 = \frac{G1.e}{(lpilares - e)} \quad (3)$$

o alívio será total de  $\Delta P_2$ (CAMPOS, 2015).

Caso a alavanca não ser ligada a um pilar interno, mas a um contrapeso ou outro elemento de fundação que tracione a viga (estaca ou tubulão), o item 5.7 da NBR 6122:2010 aconselha que se o auxílio, em função da combinação de cargas, derivar em tração no componente de fundação deverá ser considerado o total. Esse componente ainda deverá ser dimensionado para a carga de 50% de sua carga à compressão (sem alívio)(CAMPOS, 2015).

Observa-se que para o dimensionamento e cálculo das sapatas  $P_1$  e  $P_2$  será necessário o cálculo da carga  $\Delta P_2$ , que, por sua vez, depende da excentricidade. Conseqüentemente, o problema só é resolvido através de um método iterativo (CAMPOS, 2015).

#### Sequência de procedimentos

a) calcula-se a área da sapata considerando:

$$A_{sap} = \frac{(1,2 \text{ a } 1,3)P1}{\sigma_{adm, solo}} = \frac{\gamma f (1,2 \text{ a } 1,3)P1}{R_{adm, solo}} \quad (4)$$

Segundo CAMPOS (2015), o coeficiente 1,2 a 1,3, que multiplica a carga  $P_1$ , deriva de duas parcelas:

- 1ª parcela: 0,15 a 0,2 (15% a 20%) correspondem ao acréscimo de carga na fundação de  $P_1$  devido à excentricidade de  $P_1$  em relação ao centro de gravidade da sapata. É a parcela correspondente a  $\Delta P_2$ . Como o valor de  $\Delta P_2$  é a função da excentricidade  $e$  e esta, por sua vez, é a função da dimensão Área da sapata, o valor de 0,15 a 0,20 é um valor adotado.
- 2ª parcela: 0,05 a 0,10(5% a 10%) satisfazem ao acréscimo de carga na fundação pelo peso próprio da sapata mais a viga.

Esses valores estimados devem posteriormente ser verificados.

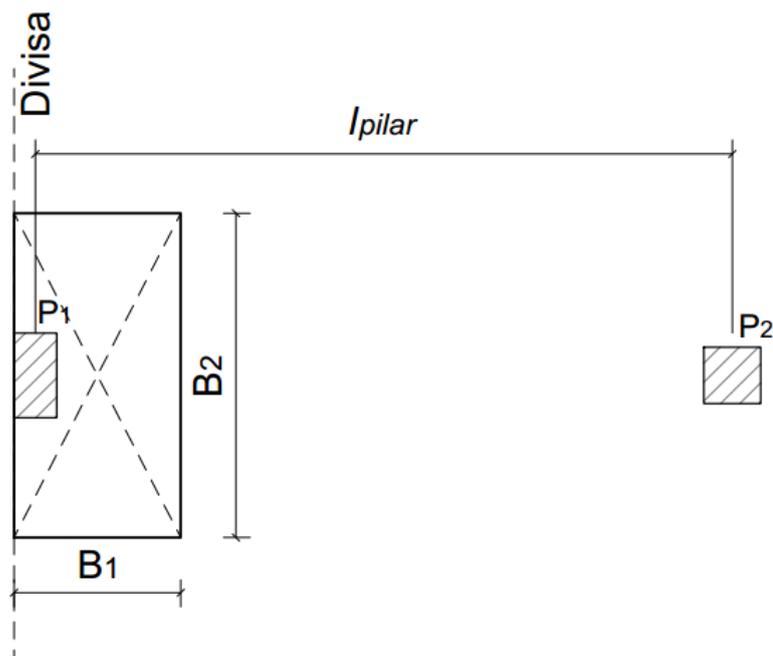
b) cálculo de  $B_2$  (comprimento da sapata perpendicular à viga de equilíbrio)

Considerar-se-á uma geometria de sapata onde  $B_2$  seja aproximadamente 2 a 2,5 o valor de  $B_1$ . Essa relação se explica ao se recordar que, a excentricidade e cresce proporcional com o valor de  $B_1$ , então, mais requerida será a viga alavanca. Por outro lado,  $B_1$  não pode ter uma dimensão muito grande, tendo em vista os aspectos econômicos (CAMPOS, 2015).

Na Fig. 7  $l_{\text{pilar}}$  é a distância entre eixos de pilares.

$$B_2 = (2 \text{ a } 2,5)B_1 \therefore A_{\text{sap.}} = B_1 \cdot B_2 \therefore B_1^2 = \frac{A_{\text{sap.}}}{2} \quad (5)$$

**Figura 7- Dimensões de  $B_1$  e  $B_2$ .**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Campos (2015).

c) cálculo da altura da sapata (como sapata rígida)

$$h = \frac{B_2 - b_2}{3} \quad (6)$$

d) cálculo da reação excentricidade da viga ( $\Delta P_2$ )

$$e = \frac{B_1}{2} - \frac{b_1}{2} = \frac{1}{2}(B_1 - b_1) \quad (7)$$

em que:

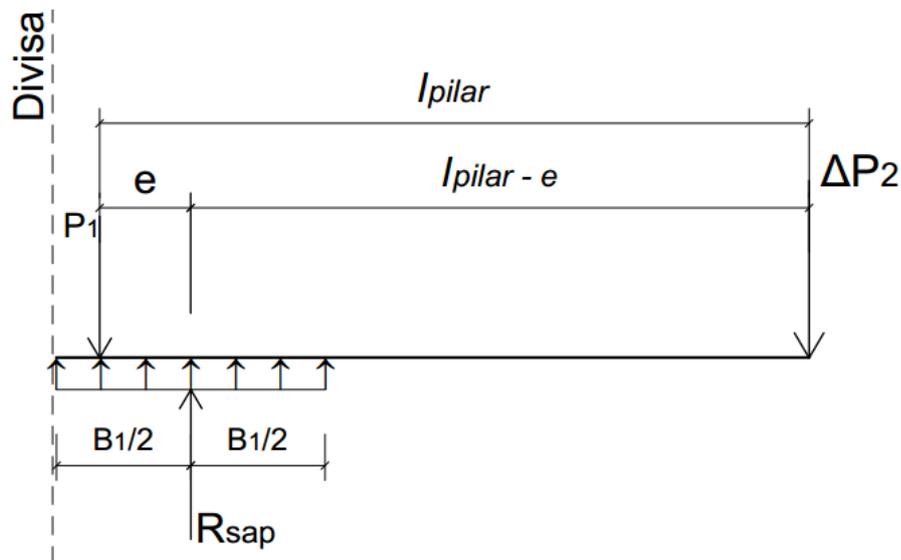
$B_1$  é a largura da sapata na direção da viga alavanca;

$b_1$  é a largura do pilar na direção  $B_1$ .

e] Cálculo de  $\Delta P_2$

Esquema estático de cálculo e esquema de equilíbrio de equilíbrio (Fig. 8).

**Figura 8- Sistema de equilíbrio da viga de equilíbrio.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Campos (2015).

f) verificação das dimensões da sapata

$$A_{sap.} = \frac{(P_1 + G_{sap.} + G_{solo} + \Delta P_2)}{\delta_{adm. solo}} \quad (8)$$

Após isto, determinam-se as medidas determinantes de  $B_1$ ,  $B_2$  e  $h$ . Caso a relação entre  $B_2/B_1$  estiver próximo de 2, as dimensões são admissíveis. Em

seguida, é dimensionada a sapata para  $P_2$  com as considerações feitas anteriormente (CAMPOS, 2015).

### **3.5 Flexão**

Segundo Donin (2015), quando não há força normal a flexão é definida como flexão simples. Esforços normais são aqueles cujas solicitações produzem tensões normais, que são perpendiculares às seções transversais dos elementos estruturais. Estas solicitações são oriundas do momento fletor e força normal.

São três elementos estruturais que compõem uma estrutura de concreto: as lajes, as vigas e os pilares. As vigas e as lajes estão sujeitas à flexão normal simples, que em alguns casos possam estar, também, submetidos à flexão composta. Por essa razão, o dimensionamento de seções retangulares e seções T sob o efeito da flexão normal simples é a prática mais costumeira entre os engenheiros estruturais de concreto armado (SANTOS, 1977).

A solução dos problemas da flexão simples é inferido em função de duas equações de equilíbrio, que são denominadas "equações teóricas". No Brasil é muito utilizado o equacionamento baseado em coeficientes tabelados tipo K.

#### **3.5.1 Comportamento resistente de vigas sob flexão simples**

Considerando uma viga de concreto armado biapoiada (figura 9.a), sujeita a duas cargas concentradas  $P$  crescentes e de igual intensidade. A viga é constituída de armadura longitudinal e transversal, para suportar esforços de tração e cortante, respectivamente. Como mostra a Figura 9.b, as direções das tensões de tração e de compressão são paralelas ao eixo longitudinal da viga, no estágio I. Onde há compressão os caminhos são inclinados (DONIN, 2015).

As fissuras iniciais aparecem na região de máximo momentos fletores. (Figura 9.c). Para essa quantidade de carregamento a viga mostra trechos fissurados, no estágio II, e não fissurados, no estágio I (DONIN, 2015).

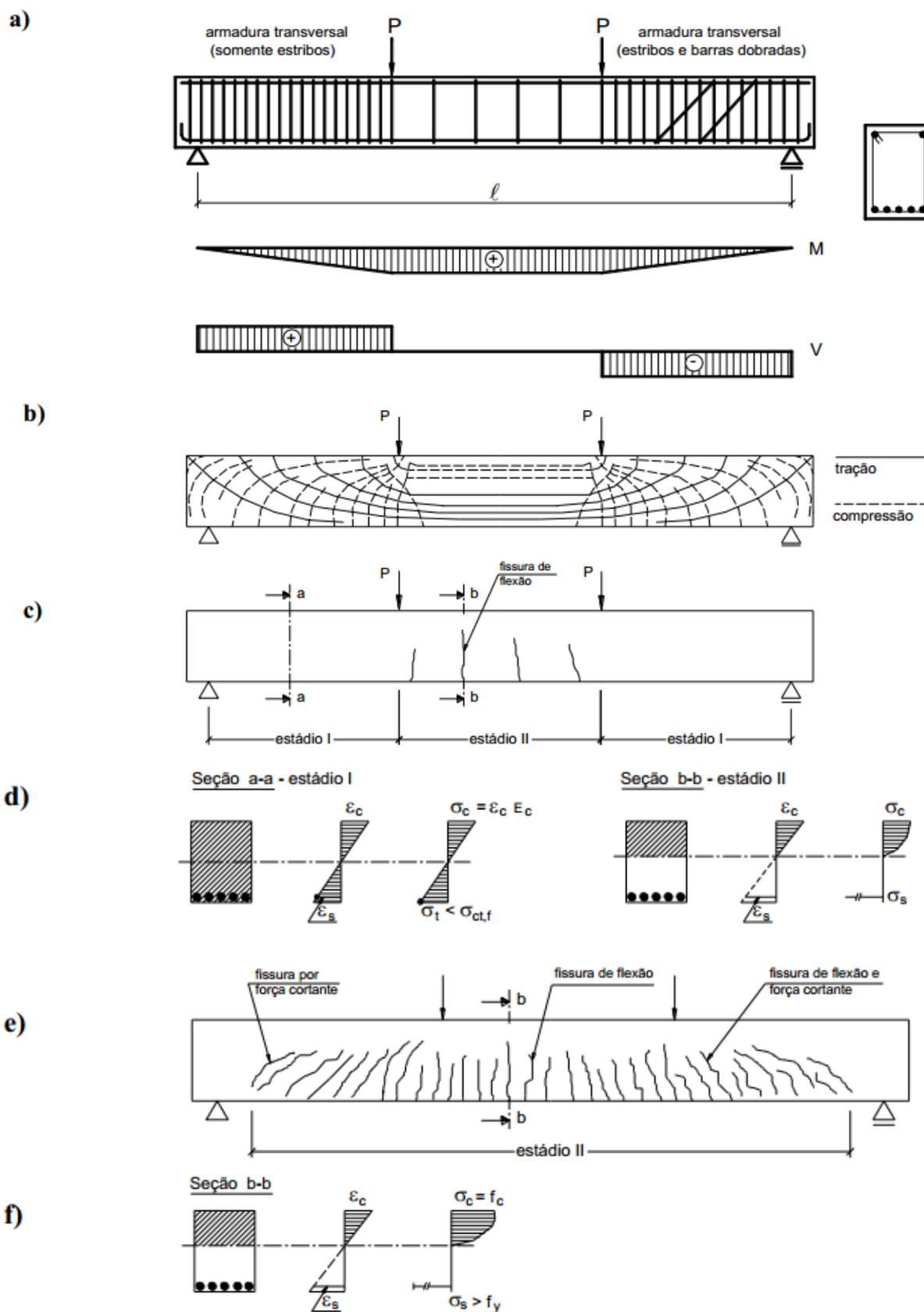
Os diagramas de deformações e de tensões nas seções a e b, são mostrados na fig. 2c, nos estádios I e II, respectivamente.

Os diagramas de deformações e de tensões nas seções a e b, são mostrados na fig. 2c, nos estádios I e II, respectivamente.

Segundo Donin (2015), em virtude do aumento de carga e da combinação de momentos fletores e força cortante, surgem fissuras inclinadas próximas ao apoio. A viga se encontra-se em quase sua totalidade no estágio II, exceto muito próximo ao apoio permanece em estágio I

Quando há carga distribuída, no estágio I, as tensões no meio da viga estão com inclinação de  $45^\circ$  ou  $135^\circ$  quanto ao eixo da viga, como mostra a figura 9.e. Observa-se que nos trechos próximos aos apoios os caminhos das tensões principais se inclinam por ação das forças cortantes. O dimensionamento dos elementos de concreto leva em conta normalmente as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  (DONIN, 2015).

Figura 9- Desempenho resistente de uma viga biapoada.



Fonte: Leonhardt e Mönig (1982) apud Donin (2015).

### 3.6 Disposições construtivas

Como determina a NBR 6118:2014 diversas orientações relativas à armaduras, considerando vigas com relação  $\frac{l}{h} \geq 2,0$ , para vigas isostáticas e  $\frac{l}{h} \geq 3,0$ , para vigas contínuas, onde  $l$  é o vão efetivo da viga (ou duas vezes o vão, no caso de balanço) e  $h$  é a altura total da viga. Vigas com relação menor que esta são tratadas como viga parede.

#### 3.6.1 Armaduras longitudinais máximas e mínimas

##### 3.6.1.1 Armadura de tração

Segundo NBR 6118:2014 em qualquer peça estrutural armada a armadura de tração mínima deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo obtido através da equação a seguir, considerada sempre a taxa mínima absoluta de 0,15%:

$$M_{d,mín} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk,sup} \quad (9)$$

Onde:

$W_0$  é o módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo as fibra mais tracionada;

$f_{ctk,sup}$  é a resistência superior do concreto à tração

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m}$$

$$\text{com: } f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}$$

A NBR 6118:2014 sugere como alternativa considerar as taxas de armadura mínima mostradas na tabela 1:

**Tabela 1 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.**

Forma da seção	Valores de $\rho_{\text{mín}}^a$ ( $A_{s,\text{mín}}/A_c$ ) %														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,21	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256

<sup>a</sup> Os valores de  $\rho_{\text{mín}}$  estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $d/h = 0,8$  e  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{\text{mín}}$  deve ser recalculado.

Fonte: NBR 6118:214

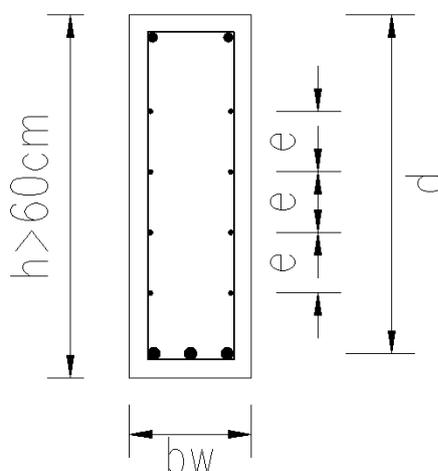
### 3.6.1.2 Armadura longitudinal máxima

Segundo NBR 6118:2014 a soma das armaduras de tração ( $A_s$ ) e de compressão ( $A'_s$ ) não pode ter valor superior que 4% da área da seção de concreto, considerando a região fora da zona de emendas.

### 3.6.2 Armadura de pele

Segundo a NBR 6118:2014, nas vigas com altura superior a 60 cm deve ser adicionada uma armadura lateral, afim de evitar que haja fissuras devido a retração do concreto, denominada armadura de pele (figura 10), formada por barras de CA-50 ou CA-60, com espaço entre barras não ultrapassando 20cm e com ancoragem devidamente feita nos apoios, com a mínima área distribuída em cada lateral da viga igual a 0,10% a área de concreto.

**Figura 10- Distribuição da armadura de pele.**



Fonte: Autor (2015).

Segundo Donin (2015), mesmo que a indicação da norma seja de adicionar armadura de pele em vigas com altura superior a 60cm, recomenda-se a sua aplicação em vigas com altura superior a 50cm, para impedir que surjam fissuras superficiais causadas pela retração nas faces laterais verticais. Nesse caso a armadura de pele pode ser a mesma adotada anteriormente, 0,10% a área de concreto, por face.

### 3.6.3 Espaçamento entre barras longitudinais

Para que o concreto consiga preencher todos os espaços da forma de viga e que envolva todas as barras de aço, a NBR 6118:2014 determina os espaços entre barras longitudinais (figura 11), seguintes:

- na direção horizontal ( $a_h$ )

$$a_{h,mín} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi l \\ 1,2 \cdot d_{máx,agr} \end{cases}$$

- na direção vertical ( $a_v$ )

$$\bullet \quad a_{h,mín} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi l \\ 0,5 \cdot d_{máx,agr} \end{cases}$$

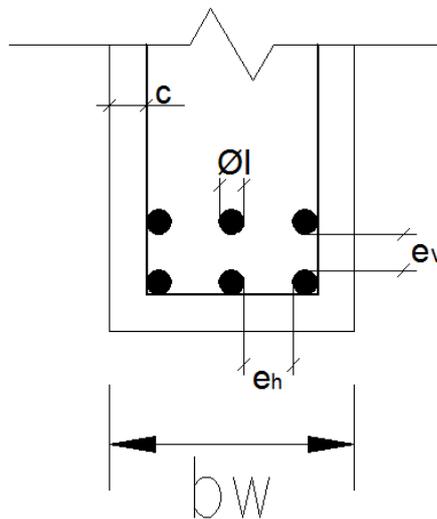
onde:  $a_{h,mín}$  = espaçamento horizontal mínimo entre barras;

$a_{v,mín}$  = espaçamento vertical mínimo entre barras;

$d_{máx,agr}$  = diâmetro máximo do agregado graúdo

$\phi l$  = diâmetro da barra longitudinal.

**Figura 11- Espaços mínimos entre barras.**



Fonte: Autor.

### 3.6.4 Hipóteses básicas

Segundo Donin (2015), os princípios mostrados valem para elementos de seções lineares submetidos a força normal e momentos fletores, como viga, pilares e tirantes.

- após deformação as seções transversais devem se manter planas;
- a deformidade em cada barra de aço é a mesma que o concreto que a envolve, somente se houver aderência entre aço e concreto;
- é obrigatório desprezar a resistência do concreto à tração no seu estado-limite último (ELU);

d) o ELU tem como base os domínios de deformação;

e) o máximo alongamento admitido na armadura de tração é de 10‰, com a finalidade de evitar deformações plásticas excedentes. Através do diagrama tensão-deformação se obtém a tensão nas armaduras.

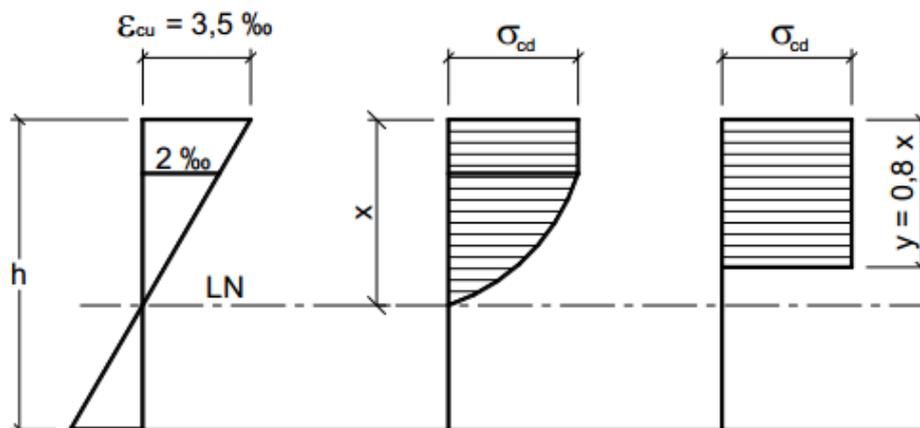
f) a distribuição de pressões de compressão no concreto é feita segundo o diagrama tensão deformação, simplificado por um diagrama retangular, que resulta na tensão máxima de  $\sigma_{cd}$  de  $0,85 \cdot f_{cd}$  onde:

$$y = 0,8 \cdot x \quad \rightarrow \text{concretos do Grupo I (} f_{ck} \leq 50 \text{ MPa);}$$

(10)

$$y = \left[ 0,8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} \right] \cdot x \quad \rightarrow \text{concretos do Grupo II (} f_{ck} > 50 \text{ MPa);}$$

**Figura 12- Diagrama parábola-retângulo e retangular simplificado, para dissipação de tensões de compressão em concretos do grupo I.**



Fonte: Leonhardt e Mönning (1982) apud Donin (2015).

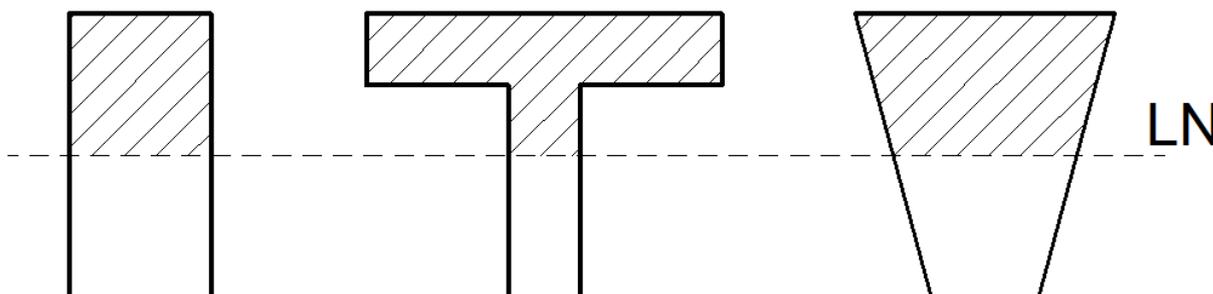
Pode ser usada como tensão de compressão do concreto ( $\sigma_{cd}$ ):

f1) no caso em que a área acima da linha neutra, borda comprimida, é maior ou igual a área de baixo (figura 13):

$$\sigma_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot \frac{0,85 f_{ck}}{\gamma_c} \quad \rightarrow \text{concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}) \quad (11)$$

$$\sigma_{cd} = \left[ 1 - \left( f_{ck} - \frac{50}{200} \right) \right] \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \quad \rightarrow \text{concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa})$$

**Figura 13 - Seções onde a linha neutra não reduz em relação a borda comprimida.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Leonhardt e Mönning (1982).

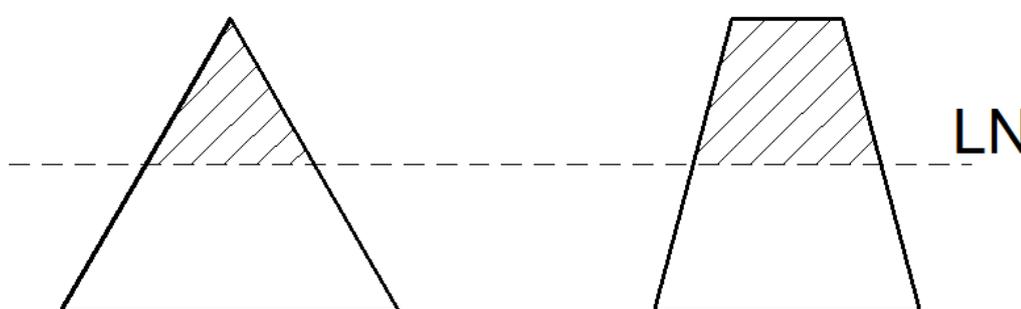
f2) caso contrário, onde a área comprimida diminui (figura 14):

$$\sigma_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot \frac{0,85 f_{ck}}{\gamma_c} \quad \rightarrow \text{concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa})$$

(12)

$$\sigma_{cd} = \left[ 1 - \left( f_{ck} - \frac{50}{200} \right) \right] \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \quad \rightarrow \text{concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa})$$

**Figura 14- Seções onde a linha neutra reduz em relação a borda comprimida.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Leonhardt e Mönning (1982).

### 3.7 Seção retangular com armadura simples

Normalmente vigas tem formas retangulares, pela facilidade de execução. Caracteriza-se viga com armadura simples a peça que demanda apenas de armadura longitudinal apenas na região tracionada. Mas por recomendações construtivas são adicionadas barras longitudinais também na parte comprimida, não sendo ponderada no cálculo de resistência à flexão, apenas para servir de amarração para os estribos(DONIN, 2015).

#### 3.7.1 Equações de equilíbrio

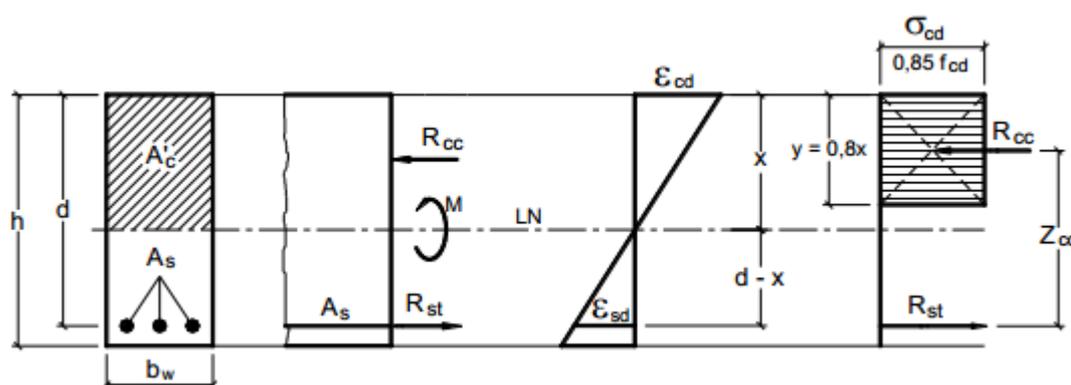
A definição dos esforços resistentes do elemento é feito com princípio nas equações universais da estática.

A Figura 15 apresenta uma seção transversal de uma viga retangular sob flexão simples, sobre efeito de um momento fletor positivo, com largura  $b_w$  e altura  $h$ ,

armadura  $A_s$  e área de compressão do concreto  $A'_c$ , demarcada pela linha neutra (LN). A altura útil é  $d$ , adotada do centro da armadura de flexão até o topo da viga (DONIN, 2015).

A altura do diagrama ( $y=0,8.x$ ) e a tensão de compressão ( $\sigma_{cd}$ ) valem para concretos do grupo I, com  $f_{ck}$  igual ou inferior a 50MPa, para os concretos do grupo II os valores são diferentes.

**Figura 15- Dissipação de tensões e deformações em viga retangular com armadura simples.**



Fonte: Leonhardt e Mönning (1982) apud Donin (2015).

### 3.7.1.1 Equilíbrio de Forças Normais

Como não há solicitações de forças normais na flexão simples, e considerando que haja equilíbrio entre a parte de concreto comprimido e a resultante das tensões de tração na armadura, como mostra a figura 15, resulta em:

$$R_{cc} = R_{st} \quad (13)$$

Utilizando  $\sigma=R/A$ , considerando o digrama simplificado a resultante das tensões de compressão é:

$$R_{cc} = \sigma_{cd} \cdot A'_c$$

Substituindo a altura por  $0,8x$ , obtido através do diagrama retangular, tem-se:

$$R_{cc} = 0,85 f_{cd} \cdot 0,8x \cdot b_w$$

$$R_{cc} = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot x \cdot b_w \quad (14)$$

A resultante na armadura tracionada:

$$R_{st} = \sigma_{sd} \cdot A_s \quad (15)$$

### 3.7.1.2 Equilíbrio de Momentos Fletores

Para haver equilíbrio entre os momentos fletores, o momento fletor de solicitação deve ser estabilizado por um momento resistente, originado pela compressão de concreto e pela tração da armadura, estes momentos devem ser iguais ao momento de cálculo, tal que:

$$M_{solic} = M_{resist} = M_d$$

As forças internas resistentes, oriundas dos esforços do concreto e da armadura, compõem um binário contrário ao momento solicitante, resultando:

$$M_d = R_{cc} \cdot z_{cc} \quad (16)$$

$$M_d = R_{st} \cdot z_{cc} \quad (17)$$

onde:  $R_{cc} \cdot z_{cc}$  = momento interno resistente, proporcionado pelo concreto comprimido;

$R_{st} \cdot z_{cc}$  = o momento interno resistente, proporcionado pela armadura tracionada.

Substituindo  $z_{cc}$  por  $d-0,4x$  na equação 16 e aplicando a equação 14 na mesma:

$$M_d = 0,68 \cdot b_w \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4x) \quad (18)$$

Substituindo a equação 15 na equação 17 dos esforços de tração do aço:

$$M_d = \sigma_{sd} \cdot A_s \cdot (d - 0,4x)$$

Colocando a área de aço ( $A_s$ ) em evidência, tem-se:

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \cdot (d - 0,4x)} \quad (19)$$

Segundo Donin (2015), as equações 18 e 19 disponibilizam o dimensionamento para vigas retangulares com armadura simples. Com a equação 18 determina-se em qual domínio a viga se encontra, através do valor de  $x$ . Nos domínios 2 e 3 a tensão é a máxima existente, isto é,  $f_{yd}$ . Determinados  $x$  e  $\sigma_{sd}$  calcula-se a seção de aço tracionada ( $A_s$ ) com a equação 19. Caso resulte em domínio 4, deveram ser feitas algumas alterações na viga, para resultar em domínio 2 ou 3. Com base na equação 18, para diminuir  $x$  pode-se:

- diminuir o valor de momento fletor solicitante ( $M_d$ );
- aumentar as dimensões da viga;
- usa um concreto com  $f_{ck}$  superior.

Segundo Donin (2015), destas, a mais executável na prática é o aumento da altura da viga ( $h$ ), sempre adaptando em função do projeto arquitetônico. Caso nenhuma das opções possa ser aplicada, deve-se usar armadura dupla na seção. Deve ser observada a posição da linha neutra com relação a altura útil ( $x/d$ ), para atender os limites impostos pela NBR 6118:2014, que são:

a)  $x/d \leq 0,45$  para concretos com  $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$ ;

(20)

b)  $x/d \leq 0,35$  para concretos com  $50\text{MPa} < f_{ck} \leq 90\text{MPa}$ .

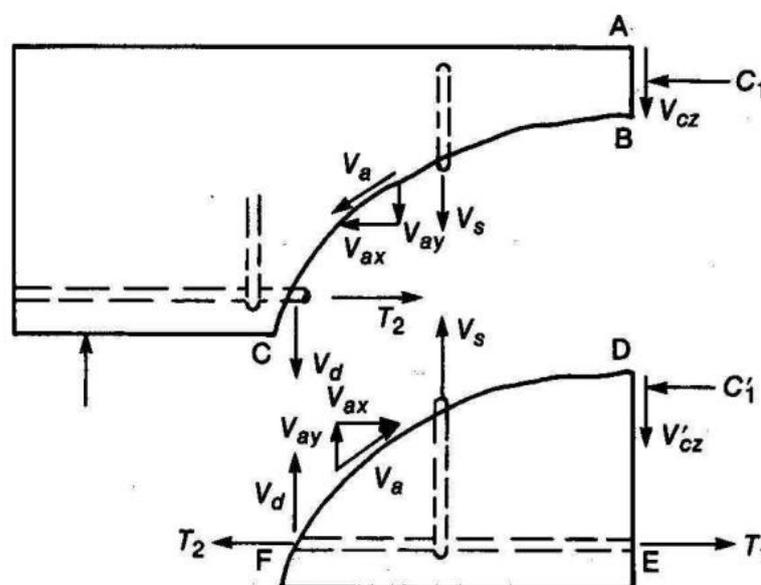
### 3.8 Cortante

#### 3.8.1 Mecanismos básicos de transmissão da força cortante

Segundo Donin (2015), ruptura por esforço cortante são identificadas com dificuldades, uma vez que os mecanismos encarregados pela transição de esforço cortante são diversos. Caso não haja armadura transversal (estribos) os mecanismos mais consideráveis são os cinco seguintes:

- 1) esforço cortante no trecho não fissurado (banzo de concreto comprimido -  $V_{cz}$ ) (figura 16);
- 2) atrito entre as superfícies das fissuras inclinadas;
- 3) armadura de tração com efeito de pino ( $V_d$ );
- 4) ação de arco;
- 5) fissuras inclinadas por efeito de tensão de tração.

**Figura 16- Mecanismos de transmissão de força cortante em vigas com estribos.**

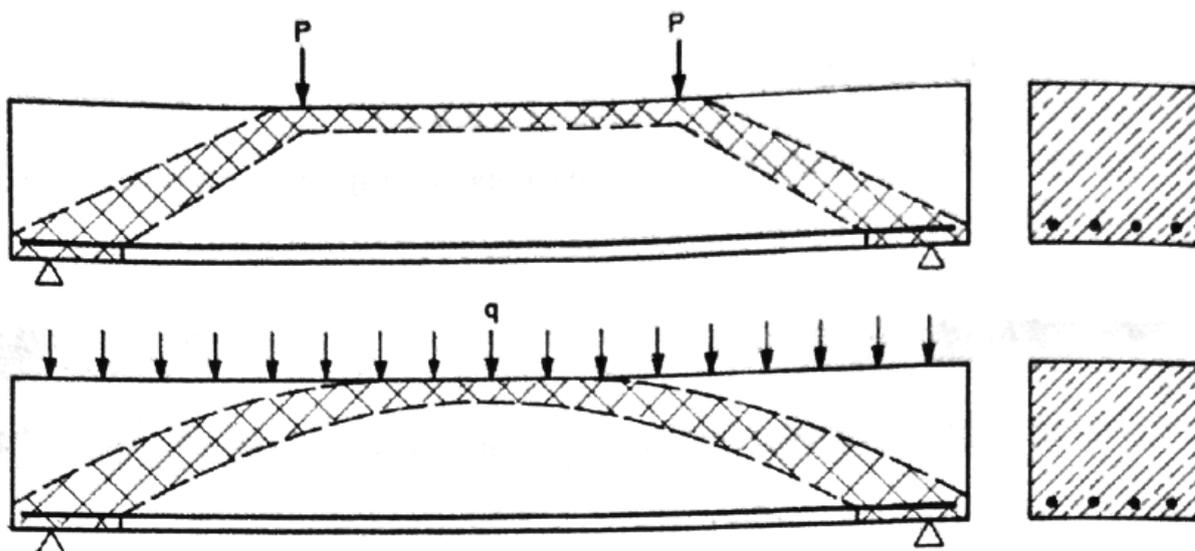


Fonte: Leonhardt e Mönning (1982) apud Donin (2015).

### 3.8.1.1 Ação de arco

A biela de compressão do concreto absorve os esforços originados pelo banzo comprimido de flexão que se inclina para os apoios, diminuindo a tração na alma. A formação do arco propõe uma reação horizontal no apoio, que em virtude de armadura de tração pode ser originada em vigas biapoiadas. Na figura 17 a área hachurada representa a ação do arco para cada tipo de carga.

Figura 17- Ação de arco.



Fonte: Leonhardt e Mönning (1982).

### 3.8.1.2 Concreto comprimido não fissurado

A parte de concreto sem fissuração (banzo de concreto), também fornece resistência à cortante, que é  $V_{cz}$  na figura 16. A parcela fornecida pelo banzo é proporcional com a altura da viga. O valor de contribuição pode variar de 20% a 40% de resistência a força cortante, baseado em estudos experimentais (DONIN, 2015).

### **3.8.1.3 Atrito entre as fissuras inclinadas**

Segundo Donin (2015), o atrito gerado pelo deslizamento entre duas áreas de concreto, entre as superfícies da fissura, possibilita uma transmissão de esforço cortante. Os mecanismos mais relevantes na interface das fissuras são: cisalhamento no campo de interação, tensão normal, largura e deslizamento da fissura.

O engrenamento dos agregados na conexão das fissuras tem uma significativa colaboração na resistência ao cortante, entre 33% a 50% do valor total da cortante pode ser transmitida pelo engrenamento das faces.

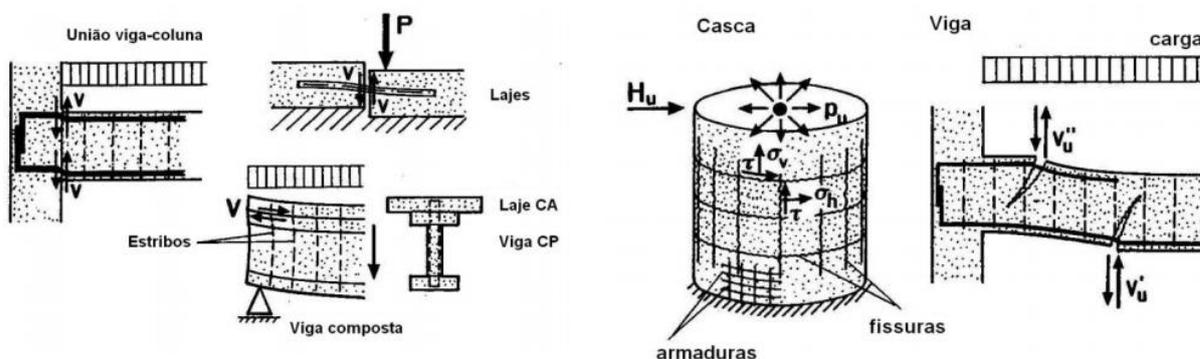
A largura das fissuras e o tamanho dos agregados são os fatores que mais contribuem na resistência à cortante. Quanto maior o tamanho do agregado e quanto menor a dimensão da largura da fissura maior a resistência.

As fissuras causadas por força cortante na alma da viga sofrem maior auxílio do engrenamento dos agregados, e menor nas fissuras inclinadas provenientes de flexão. Um menor espaçamento dos estribos também contribui para o engrenamento dos agregados (DONIN, 2015).

### **3.8.1.4 Ação de pino na armadura longitudinal**

A ação de pino de uma barra de aço introduzida no concreto provoca uma transmissão de esforço cortante, ocorre em várias aplicações práticas das estruturas de concreto armado (figura 18).

**Figura 18- Exemplos onde ocorre ação de pino.**

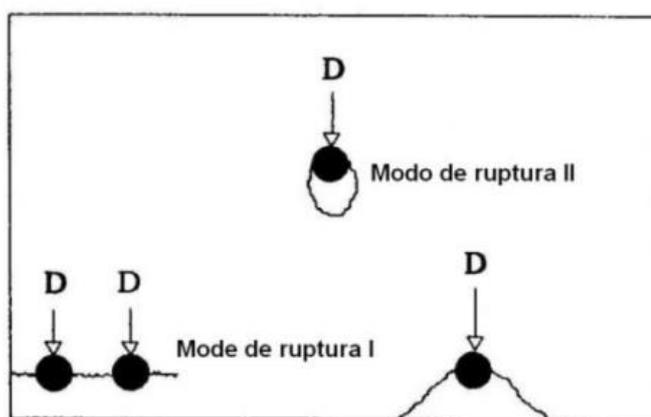


Fonte: Leonhardt e Mönnig (1982) apud Donin (2015).

Segundo Donin (2015), a ação de pinos pode resistir de 15% a 25% a força cortante normal. Na circunstância de carga última é necessário respeitar as não-linearidades do aço e do concreto, do mesmo modo que o dano do concreto na região da força cortante.

Pode acontecer o fendilhamento do cobrimento, e esmagamento do concreto sob barra, estes são os dois tipos de ruptura que se ocasionam, como mostra a figura 19. O modo I de ruptura ocorre em cobrimentos de pouca espessura, já o modo II de ruptura se dá em cobrimento grandes. Quando há ruptura correspondente a fissuras de fendilhamento próximo a barra (modo I), o diâmetro da barra é inversamente proporcional a máxima resistência do efeito pino, a relação se aplica também quando se trata de cobrimentos grandes (modo II) (DONIN, 2015).

**Figura 19- Modos de ruptura por ação de pino.**



Fonte: Leonhardt e Mönnig (1982) apud Donin (2015).

### **3.8.1.5 Tensões residuais de tração**

Segundo Donin (2015), quando o concreto fissura não há uma separação total das superfícies, porque pequenas partículas conectam as duas áreas da fissura e continuam a transportar forças de tração, isto vale para fissuras entre 0,05mm e 0,15mm. Esta capacidade auxilia na transmissão de força cortante.

### **3.8.1.6 Armaduras longitudinal e vertical**

Antes do aparecimento de fissuras inclinadas em vigas, a deformação dos estribos é a mesma no concreto próximo a ele. Os estribos só passam a transmitir força cortante após o início da fissuração.

Os estribos contribuem para evitar fissuras e que elas aumentem, ocasionando uma ruptura mais dúctil à viga. A resistência da armadura transversal à cortante tipicamente calculada por treliça clássica, adicionada à contribuição do concreto, ou por meio da treliça de ângulo variável sem contribuição do concreto.

## **3.8.2 Fatores que influenciam a resistência à força cortante**

Segundo Donin (2015), o número de coeficientes, que atuam na resistência à cortante é muito elevado (cerca de 20), muitos destes não se tem conhecimento da sua influência no força cortante. A seguir estão apresentados os principais fatores que influenciam no cortante.

### **3.8.2.1 Tipo de carregamento**

Em uma viga esbelta sem estribos, a sua resistência a cortante é cerca de 20% a 30% maior em casos de carga uniformemente distribuída do que em casos em que há duas cargas pontuais nas piores situações. Entretanto, para o dimensionamento sempre será adotado o pior caso (DONIN, 2015).

### **3.8.2.2 Posição da carga e esbeltez**

A distância do apoio até a carga tem grande influência em casos de cargas pontuais, já em cargas distribuídas o fator que tem influência é a esbeltez. Quando uma viga sofre ruptura à cortante, a pior condição foi determinada no trecho  $a=2,5h$  a  $3,5h$ , o que equivale em relação a momento-força cortante de  $M/Vh = a/h = 2,5$  a  $3,5$ . Rigidezes de  $l/h = 10$  a  $14$ , são as que ocasionam as piores condições de ruptura para cargas distribuídas por força cortante.

### **3.8.2.3 Forma da seção transversal**

A seção transversal da viga I tem forte atuação sobre a resistência à força cortante, visto que, uma viga retangular pode se adequar a aumentos de inclinação do banzo comprimido. Em vigas T o banzo só absorve uma parcela da força cortante, já que a força deste permanece na largura da laje comprimida até a proximidade do apoio. As diagonais comprimidas e os estribos ficam responsáveis por absorver o restante do esforço cortante (DONIN, 2015).

Em vigas retangulares, os estribos só estão sujeitos as tensões de compressão, até ocorrer fissuras que cruzem a armadura transversal. Em vigas T estes esforços aumentam em almas delgadas, mas ficam bem abaixo da tensão de escoamento do aço (DONIN, 2015).

## **3.9 Comportamento de vigas com armadura transversal**

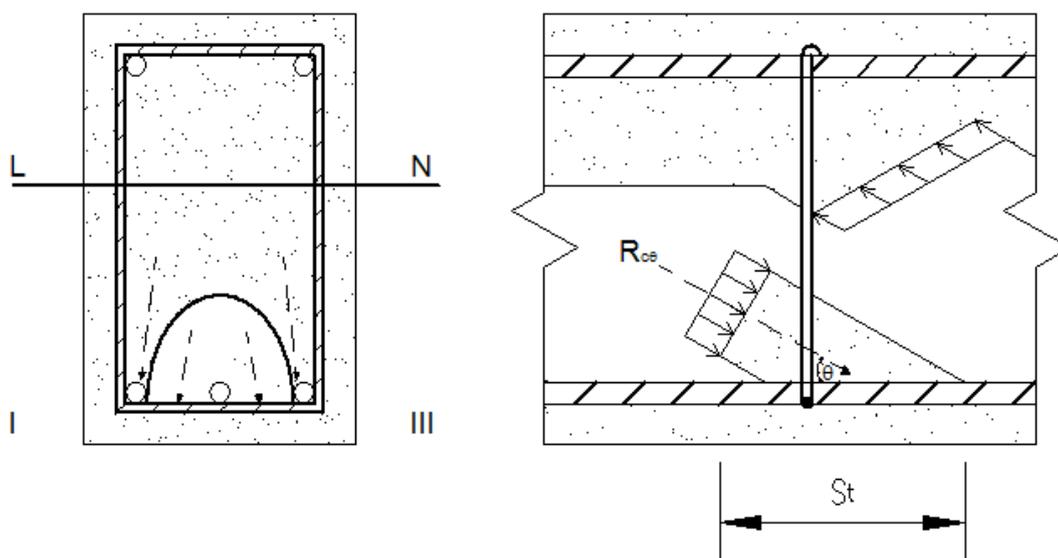
Segundo Donin (2015), quando as tensões inclinadas ( $\sigma_1$ ) atingem a resistência do concreto à tração, aparecem as fissuras inclinadas iniciais (por "cisalhamento"). Conforme o carregamento vai aumentando os esforços dentro da viga vão se redistribuindo, e os estribos e a diagonal comprimida passam a ser mais efetivos.

Quando os estribos forem mal dimensionados, estes alcançam o início de escoamento ( $\varepsilon_y$ ), e as fissuras oriundas do cisalhamento avançam em direção ao banzo comprimido. O atrito entre as faces da fissura pode oferecer resistência, mas caso as fissuras aumentem, esta resistência diminui, ocasionando um aumento da força transferida para outros mecanismos. Caso isso ocorra o concreto pode sofrer uma ruptura brusca (DONIN, 2015).

Em vigas com reforço no banzo, como seções I e T, com armaduras reforçadas, surgem diversas fissuras inclinadas, podendo romper bruscamente as bielas comprimidas entre as fissuras caso seja atingida a resistência do concreto à compressão. Isto ocorre porque as diagonais sofrem exigência maior que a resistência do concreto, antes que os estribos escoem (DONIN, 2015).

Em uma viga retangular o trabalho exercido pelos estribos fechados, na analogia de treliça, está representado na figura 20. Nas extremidades inferiores o estribo entrelaça a armadura de tração e nas extremidades superiores o estribo é ancorado no banzo comprimido e na armadura superior. Na parte superior do estribo, as barras longitudinais também operam para impedir o fendilhamento, que é causado pelo gancho do estribo ao impor tensões de tração em uma pequena quantidade de concreto (DONIN, 2015).

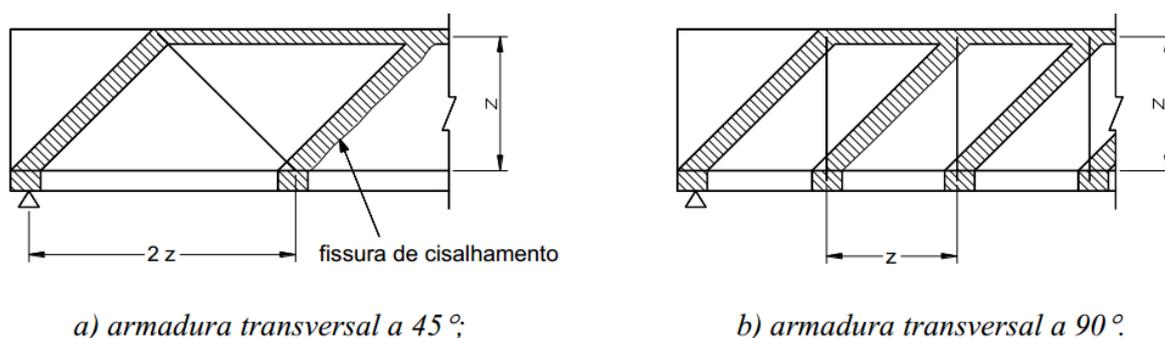
**Figura 20- Desempenho de estribos no modelo de treliça.**



### 3.10 Treliça clássica de Ritter-Mörsch ( $\theta=45^\circ$ )

A reação da região de uma viga sob maior ação de esforço cortante e com fissuras inclinadas no estágio II, pode ser bem representado fazendo-se analogia a uma treliça isostática (figura 21). Cada barra da treliça retrata uma parcela da viga simples: o banzo inferior é a armadura tracionada, o banzo superior é a parte comprimida de concreto, as partes inclinadas são as bielas de compressão entre as fissuras inclinadas e as diagonais sob tração (DONIN, 2015).

**Figura 21- Analogia da treliça clássica na proximidade dos apoios.**



Fonte: Leonhardt e Mönnig (1982).

Quanto mais próximos forem os estribos, melhor será a interceptação das fissuras inclinadas, uma vez que pode ocorrer uma ruptura antecipada quando o espaçamento entre os estribos for  $\geq 2z$  para estribos a  $45^\circ$  e  $> z$  para estribos a  $90^\circ$  (figura 21), onde  $z$  é o braço de alavanca da viga (distância entre as resultantes referente ao banzo de tração e de compressão) (DONIN, 2015).

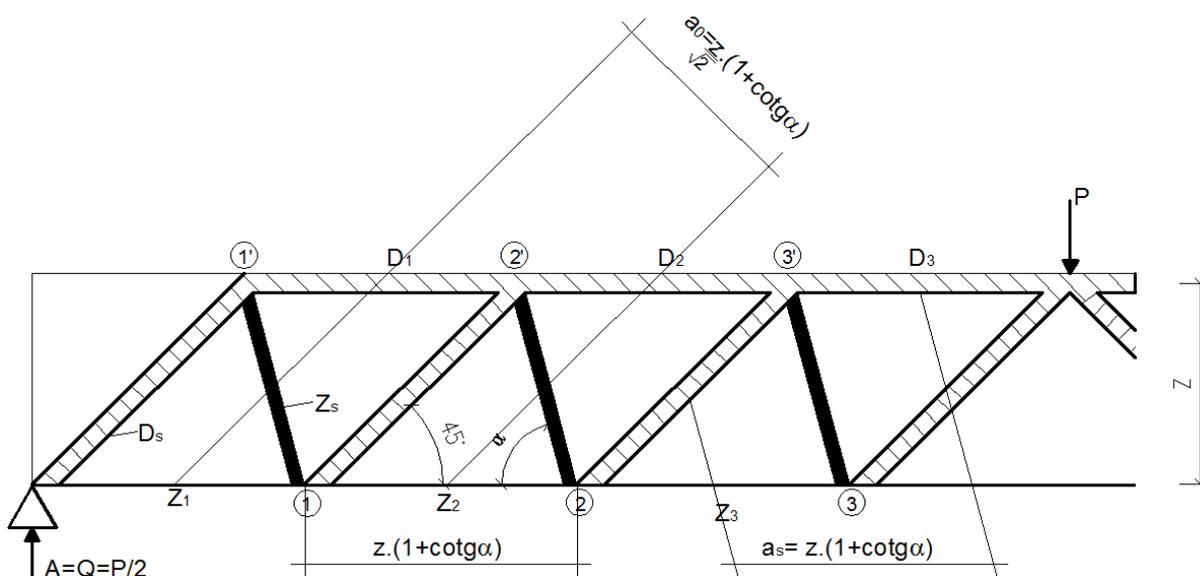
Admite-se uma viga biapoiada já fissurada (estádio II) (figura 22), submetida a uma carga pontual  $P$  no centro do vão e que resulta esforço cortante constante, e onde é representada também a treliça isostática. A analogia dessa viga com a treliça clássica, com ângulo da biela de compressão a  $45^\circ$  e com as diagonais tracionadas a um ângulo qualquer  $\alpha$ .

Tratando-se de uma treliça isostática, pode-se determinar os esforços em cada barra considerando o método de equilíbrio de nós, a partir da força cortante. Analisando a seção 1-1 da treliça sob influência da força cortante  $V$ , a resultante na diagonal comprimida (biela de compressão -  $R_{cb}$ ) é:

$$V = R_{cb} \cdot \text{sen } 45 \quad (21)$$

$$R_{cb} = \frac{V}{\text{sen } 45} = \sqrt{2} \cdot V \quad (22)$$

**Figura 22- Viga configurada de acordo com a treliça clássica de Ritter-Mörsch.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Leonhardt e Mönnig (1982).

A distância paralela às diagonais comprimidas, é:

$$\frac{z}{\sqrt{2}} (1 + \cot \alpha)$$

A força de cada diagonal comprimida na área da biela comprimida:

$$b_w \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} (1 + \cot \alpha)$$

onde  $b_w$  é a largura da seção transversal, e  $\alpha$  é o ângulo das diagonais tracionadas. Então, a tensão média de compressão nas bielas é:

$$\sigma_{cb} = \frac{R_{cb}}{b_w \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} (1 + \cotg \alpha)} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2} V}{b_w z (1 + \cotg \alpha)}$$

$$\sigma_{cb} = \frac{2V}{b_w z (1 + \cotg \alpha)} \quad (23)$$

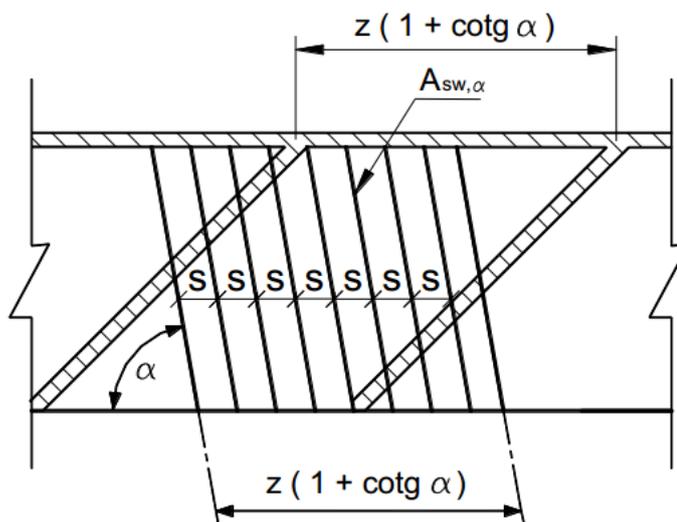
O esforço na diagonal tracionada, pode ser calculado através do método de equilíbrio de nós:

$$V = R_{s,\alpha} \operatorname{sen} \alpha \quad (24)$$

$$R_{s,\alpha} = \frac{V}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (25)$$

Cada diagonal tracionada com força  $R_{s,\alpha}$ , é correspondente a um comprimento da viga, a distância  $z (1 + \cotg \alpha)$ , medida longitudinalmente na direção do eixo, e deve ser suportada por um estribo (figura 23).

**Figura 23 - Resistência à força cortante da armadura transversal  $A_{sw}$ .**



Fonte: Donin (2015).

Considerando a área do estribo  $A_{sw}$ , a área de aço no trecho entre as diagonais comprimidas é dada por:

$$A_{sw,\alpha} \frac{z (1 + \cotg \alpha)}{s}$$

A tensão  $\sigma_{sw}$  no estribo é determinada por:

$$\sigma_{sw,\alpha} = \frac{R_{s,\alpha}}{A_{sw,\alpha} z (1 + \cotg \alpha)} = \frac{V}{z (1 + \cotg \alpha) \operatorname{sen} \alpha} \frac{s}{A_{sw,\alpha}}$$

$$\sigma_{sw,\alpha} = \frac{V}{z (\operatorname{sen} \alpha + \cotg \alpha)} \frac{s}{A_{sw,\alpha}} \quad (26)$$

O ângulo pode variar de  $45^\circ$  a  $90^\circ$ , sendo que em quase a totalidade dos casos da prática os estribos são usados a  $90^\circ$ . Porém quanto menor for o ângulo, respeitado o valor mínimo de  $45^\circ$ , menor serão as tensões na bielas de compressão (DONIN, 2015).

### 3.11 Dimensionamento segundo NBR 6118:2014

A norma divide o cálculo de acordo com dois modelos. O modelo I assume a chamada treliça clássica, com ângulo de  $45^\circ$  para as diagonais comprimidas. Já o modelo de cálculo II considera a treliça generalizada, que tem ângulo variável entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ .

As condições de segurança são atendidas quando são verificados os Estados Limites Últimos, respeitado concomitantemente as duas condições seguintes:

$$V_{sd} \leq V_{rd2} \quad (27)$$

$$V_{sd} \leq V_{rd3} = V_c + V_{sw} \quad (28)$$

onde:  $V_{sd}$  = força cortante solicitante de cálculo na seção;

$V_{rd2}$  = força cortante resistente de cálculo, referente a diagonal de compressão;

$V_{rd3} = V_c + V_{sw}$ , força cortante resistente de cálculo, referente à tração diagonal;

$V_{sw}$  = parte da solicitação da força cortante resistida pelos estribos.

$V_c$  = resistência do concreto a força cortante.

#### 3.11.1 Modelo de cálculo I

A NBR 6118:2014 adota para o modelo I a treliça clássica de Ritter-Mörsch, que tem ângulo da biela de compressão igual a  $45^\circ$  e  $V_c$  constante.

### 3.11.1.1 Verificação da biela de compressão

Admitindo  $\theta=45^\circ$ , tem-se:

$$\sigma_{cb} = \frac{2V}{b_w \cdot z \cdot (1 + \cot g \alpha)}$$

O valor de  $f_{cd2}$  é limitado pela NBR 6118:2014. Quando há fissuras transversais às tensões de compressão e tração transversal por consequência das armaduras, o valor de  $f_{cd2}$  serve para reduzir a resistência do concreto à compressão, o valor é definido por:

$$f_{cd2} = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} = 0,60 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \quad (29)$$

Substituindo  $z$  por  $0,9d$  (onde  $d$  é a altura útil),  $\sigma_{cb}$  por  $f_{cd2}$  e  $V$  por  $V_{rd2}$ , tem-se:

$$0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = \frac{2 \cdot V_{rd2}}{b_w \cdot 0,9d \cdot (2 + \cot g \alpha)}$$

$$V_{Rd2} = \frac{0,60 \alpha_{v2} f_{cd} b_w 0,9 d (1 + \cot g \alpha)}{2} \quad (30)$$

$$V_{Rd2} = 0,27 \alpha_{v2} f_{cd} b_w d (1 + \cot g \alpha) \quad (31)$$

A inclinação do estribo ( $\alpha$ ) pode estar compreendida entre  $45^\circ$  a  $90^\circ$ , adotando  $90^\circ$ , visto que, este é o valor usado em quase a totalidade dos casos, temos:

$$V_{Rd2} = 0,27 \alpha_{v2} f_{cd} b_w d \quad (32)$$

com  $\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250}$ , com o valor de  $f_{ck}$  em MPa:

$$V_{Rd2} = 0,27 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd} b_w d \quad (33)$$

Sendo assim, de acordo com a equação 27, para não haver o esmagamento da biela de compressão, deve-se ter:  $V_{sd} < V_{rd2}$ .

### 3.11.1.2 Cálculo da armadura transversal

Como  $V_{sd} \leq V_{rd3}$ , estabelecendo a cortante de cálculo ( $V_{sd}$ ) igual a máxima cortante de cálculo, conforme à ruptura da biela de compressão (armadura transversal), tem-se:

$$V_{Sd} = V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (34)$$

A parte  $V_c$  é definida a partir de:

a) elementos tracionados quando a linha neutra está situada fora da seção:

$$V_c = 0$$

b) na flexão simples e na flexo-tração quando a linha neutra passando pela seção:

$$V_c = V_{c0}$$

$$V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d \quad (35)$$

sendo  $f_{ctd}$  resistência de cálculo a tração direta, e estimado por:

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{\gamma_c} \sqrt{f_{ck}^2}; \quad (36)$$

usando  $f_{ck}$  em MPa.

A força  $V_{c0}$  corresponde a máxima força cortante que uma viga sem estribos pode suportar.

c) na flexo-compressão:

$$V_c = V_{c0} 0,27 \left( 1 + \frac{M_0}{M_{Sd,máx}} \right) \leq 2 V_{c0} \quad (37)$$

onde:  $b_w$  = menor largura da seção;

$d$  = altura útil da seção;

$s$  = espaçamento dos estribos;

$f_{ywd}$  = tensão na armadura transversal passiva;

$\alpha$  = ângulo do estribo;

$M_0$  = momento fletor que elimina a tensão normal de compressão na borda da viga;

$M_{sd,máx}$  = momento fletor máximo de cálculo na parte em análise.

Com o valor de  $V_c$  definido, a partir da equação 34 calcula-se a força cortante resistida pelo estribo:

$$V_{sw} = V_{sd} - V_c \quad (38)$$

Substituindo na equação 26  $z$  por  $0,9d$ ,  $V$  por  $V_{sw}$  e fazendo  $\sigma_{sw,a} = f_{ywd}$ , a equação fica:

$$f_{ywd} = f_{yd} = \frac{V_{sw}}{0,9d \cdot (\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha)} \frac{s}{A_{sw,\alpha}} \quad (39)$$

$$\frac{A_{sw,\alpha}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9 d f_{ywd} (\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha)} \quad (40)$$

A NBR 6118:2014, delimita a tensão  $f_{ywd}$  ao valor de  $f_{yd}$  para estribos, e a 70% do valor de  $f_{yd}$  no caso de barras dobradas, para ambos os casos não utilizar MPa superior a 435MPa, para estribos, tem-se:

$$f_{ywd} = f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{f_{yk}}{1,15} \leq 435 \text{ MPa}$$

O limite imposto par a tensão máxima refere-se ao aço CA-50. No caso de ser usado aço CA-60, deve ser adotado os valores de tensões do aço CA-50.

A inclinação dos estribos deve respeitar o limite de  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Para  $45^\circ$  e  $90^\circ$ . Para estribos a  $45^\circ$  e  $90^\circ$  a equação 40 fica nesta ordem:

$$\frac{A_{sw,45}}{s} = \frac{V_{sw}}{1,27 d f_{ywd}} \quad (41)$$

$$\frac{A_{sw,90}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9 d f_{ywd}} \quad (42)$$

Adotando aço CA-50 ou CA-60 e estribos,  $f_{ywd}$  admite o valor de  $43,5 \text{ kN/cm}^2$ , substituídos nas equações 41 e 42, resultam em:

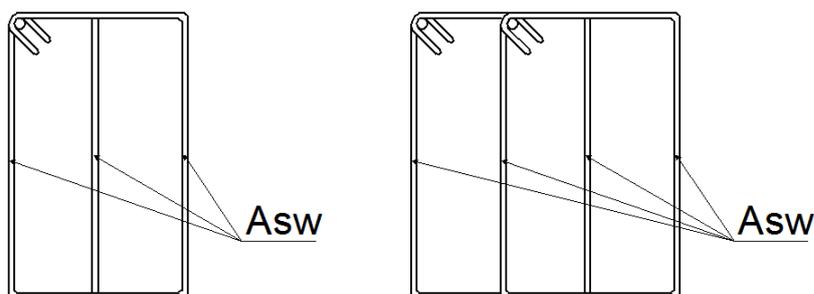
$$\frac{A_{sw,45}}{s} = \frac{V_{sw}}{55,4 d}$$

$$\frac{A_{sw,90}}{s} = \frac{V_{sw}}{39,2 d}$$

Vale ressaltar que  $\frac{A_{sw}}{s}$  é o estribo por unidade de comprimento da viga e  $A_{sw}$  é a área total dos estribos.

O valor de  $A_{sw}$  equivale a área de todos os ramos do estribo, independentemente do número de ramos (figura 24), sendo que na maioria dos casos são usados dois ramos.

**Figura 24 - Área de aço ( $A_{sw}$ ) de estribos de três e quatro ramos.**



Fonte: Autor.

### 3.12 Disposições construtivas

#### 3.12.1 Armadura mínima

Conforme a NBR 6118:2014, todos os elementos lineares sujeitos a esforços cortantes, deve haver uma armadura transversal mínima, dimensionada a partir de:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (43)$$

onde:  $A_{sw}$  = área total da seção transversal de cada estribo;

$s$  = espaçamento dos estribos;

$\alpha$  = ângulo de inclinação de cada estribo;

$b_w$  = largura da alma;

$f_{ywk}$  = resistência ao escoamento do estribo;

$f_{ct,m}$  = resistência média a tração do concreto;

Para armadura mínima, isola-se  $\frac{A_{sw}}{s}$  na equação 43, fica:

$$\frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{0,2 \cdot f_{ct,m}}{f_{ywk}} \cdot b_w \cdot \text{sen}\alpha \quad (44)$$

Adotando um trecho ( $s$ ) igual a 100 e  $\alpha$  de 90°, a equação anterior fica:

$$A_{sw,mín} \geq \frac{20 \cdot f_{ct,m}}{f_{ywk}} \cdot b_w \quad (45)$$

onde:  $A_{sw,mín}$  = área de todos os estribos;

$b_w$  em cm;

$f_{ywk}$  em kN/cm<sup>2</sup>.

A resistência  $f_{ct,m}$  deve ser aplicada em kN/cm<sup>2</sup> e calculada a partir de:

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}, f_{ck} \text{ em MPa}$$

### 3.12.2 Diâmetro do estribo

As indicações para o diâmetro dos estribos ( $\phi_t$ ) são (NBR 6118:2014):

$$5mm \leq \phi_t \leq b_w/10 \quad (46)$$

#### 3.12.2.1 Espaçamento mínimo e máximo entre estribos

Segundo a NBR 6118:2014, deve-se haver um espaçamento mínimo entre estribos afim de garantir que possa passar o vibrador entre estes, para garantir o bom adensamento do concreto. Admitindo-se uma folga de 1cm para o acesso da agulha do vibrador, o espaçamento mínimo fica:

$$s \geq \phi_{vibr} + 1cm \quad (47)$$

Os estribos não podem ter espaçamento maior que:

$$V_{sd} \begin{cases} \leq 0,67V_{rd2} \rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,6d \leq 30cm \\ > 0,67V_{rd2} \rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,3d \leq 20cm \end{cases} \quad (48)$$

#### 3.12.2.2 Espaçamento máximo entre os ramos verticais do estribo

Segundo a NBR 6118:2014 o espaçamento entre ramos deve respeitar as seguintes condições:

$$V_{sd} = \begin{cases} \leq 0,20 V_{rd2} \rightarrow s_{t,m\acute{a}x} = d \leq 80cm \\ > 0,20 V_{rd2} \rightarrow s_{t,m\acute{a}x} = 0,6 \cdot d \leq 35cm \end{cases} \quad (49)$$

O espaçamento entre ramos, serve para definir o número de ramos usados na viga. O valor de  $s_{t,m\acute{a}x}$  serve para o caso de vigas com largura ( $b_w$ ) elevadas,

normalmente acima de 40cm de largura a viga necessita de mais que dois ramos de estribos, empregados normalmente em vigas de equilíbrio, vigas de pontes, vigas de vãos elevados, etc (DONIN, 2015).

### **3.12.2.3 Emenda do estribo**

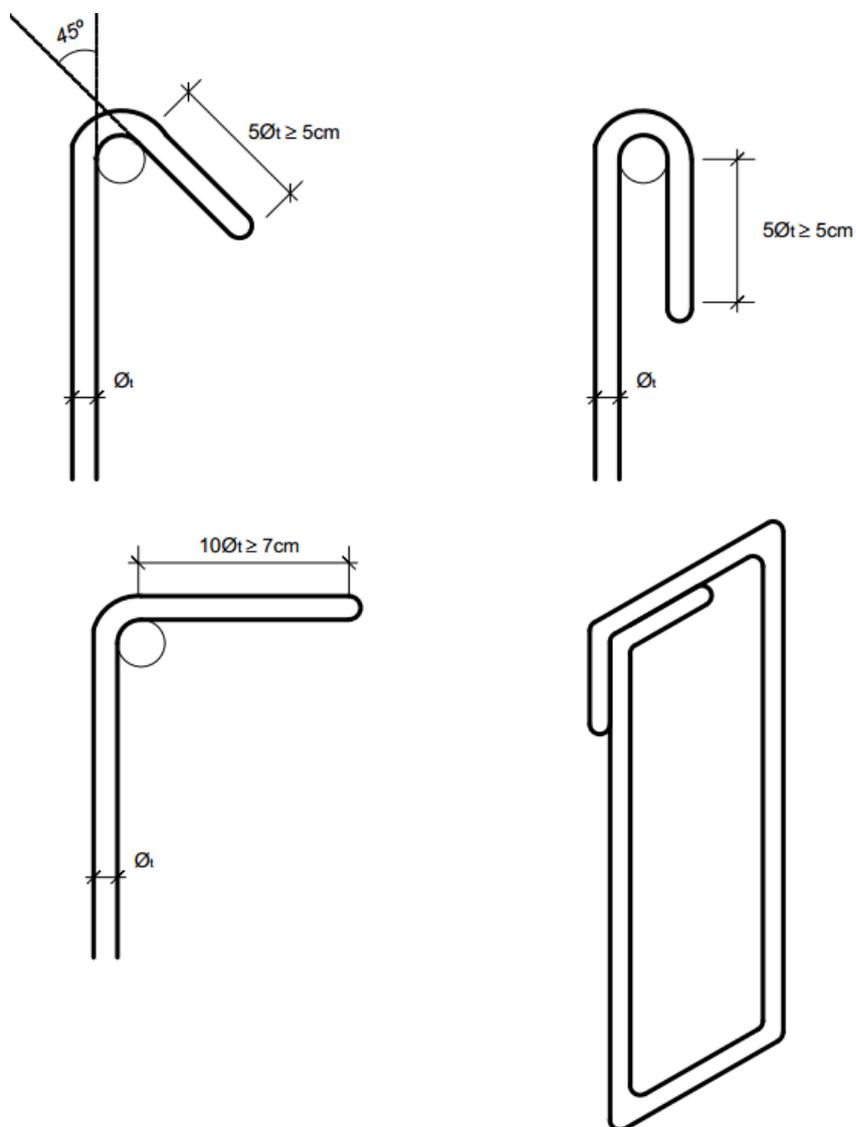
Segundo a NBR 6118:2014, emendas em estribos por transpasse só são possibilitados se forem empregadas telas ou barras de alta aderência.

### **3.12.2.4 Ancoragem do estribo**

Segundo a NBR 6118:2014, a ancoragem deve necessariamente ser executada por meio de soldas em barras longitudinais ou por meio de ganchos. De acordo com a norma, os ganchos dos estribos podem ser (figura 26):

- a) dobras dobradas em 45° ou semicirculares, devem ter o comprimento da ponta reta de  $5\phi_t$ , respeitando o limite mínimo de 5cm;
- b) barras dobradas a 90°, devem ter o comprimento da ponta reta de  $10\phi_t$ , respeitando o limite mínimo de 7cm.

**Figura 25- Tipos de ganchos para estribos.**



Fonte:Autor.

### 3.13 Efeito console

Segundo Guerrin (2002), quando uma viga é submetida a grandes esforços próximos aos apoios, é possível o emprego de estribos. Em cada apoio, pode-se imaginar, o efeito de biela de compressão do concreto transferindo a carga ao apoio, tracionando a armadura longitudinal fazendo o papel de um tirante.

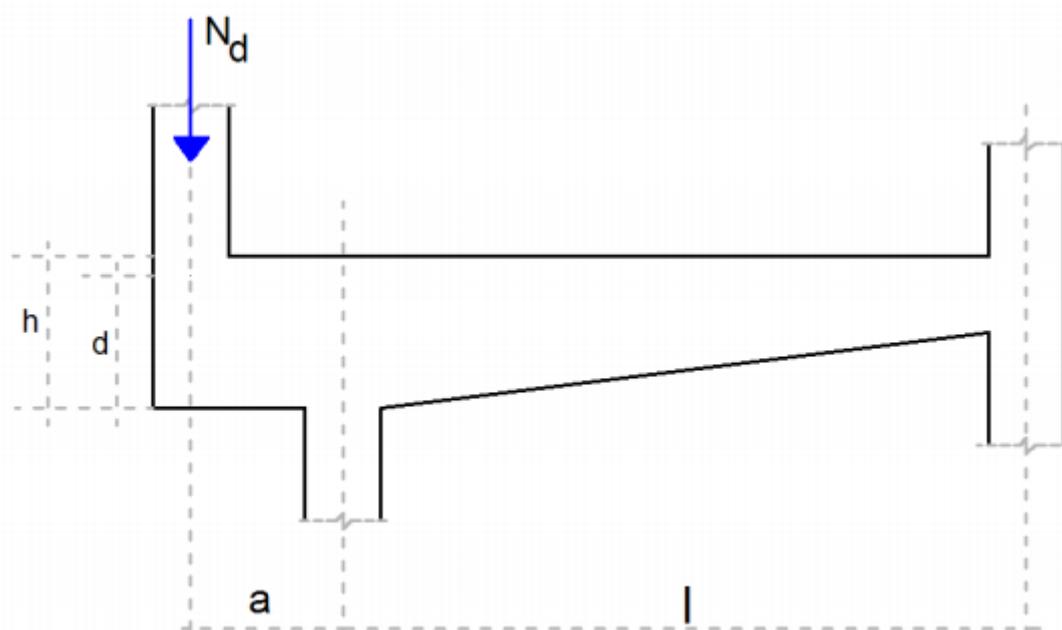
Segundo Tanno (2012), o modelo de biela-tirante visto em vigas de equilíbrio, é semelhante ao que ocorre em consolos, onde as bielas de compressão são o



### 3.14 Alguns Estudos Sobre Vigas de Equilíbrio

TANNO (2012), analisou o roteiro de dimensionamento de uma viga de equilíbrio sobre um apoio, podendo estar sobre uma estaca ou um tubulão. No caso analisado não há presença de bloco, a viga descarrega diretamente na estaca (figura 28).

**Figura 27 - Viga de equilíbrio com força direta**



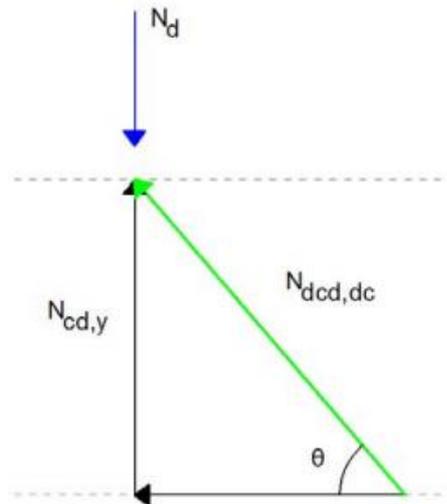
Fonte: Tanno (2012).

A biela comprimida faz com que a carga do pilar seja diretamente transmitida para o apoio num ângulo de  $45^\circ$ , que é adotado pelo modelo de treliça clássica de Ritter-Mörsch. Através da analogia da treliça e pelo método de equilíbrio de nós, tem-se:

$$N_{d,dc} = \frac{N_d}{\text{sen}\theta} \quad (50)$$

Como a tensão na biela é a força aplicada nela dividida por sua área, tem-se:

**Figura 28 - Analogia de treliça.**



Fonte: Tanno (2012).

$$\sigma_{biela} = \frac{N_{d,dc}}{a_b \cdot b_w} \quad (51)$$

Substituindo o valor de \$N\_{d,dc}\$ na equação anterior:

$$\sigma_{biela} = \frac{N_d}{a_b \cdot b_w \cdot \text{sen}\theta} \quad (52)$$

Como esta tensão não pode ultrapassar \$0,85 \cdot f\_{cd}\$, conclui-se:

$$\sigma_{biela} \leq 0,85 \cdot f_{cd}$$

$$\frac{N_d}{a_b \cdot b_w \cdot \text{sen}\theta} \leq 0,85 \cdot f_{cd} \quad (53)$$

Isolando a largura da biela, chega-se a equação seguinte:

$$a_b \geq \frac{N_d}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \text{sen}\theta} \quad (54)$$

Onde o ângulo varia entre \$30^\circ\$ e \$60^\circ\$. Como a treliça clássica de Ritter-Mörsch adota um ângulo para inclinação de \$45^\circ\$, tem-se:

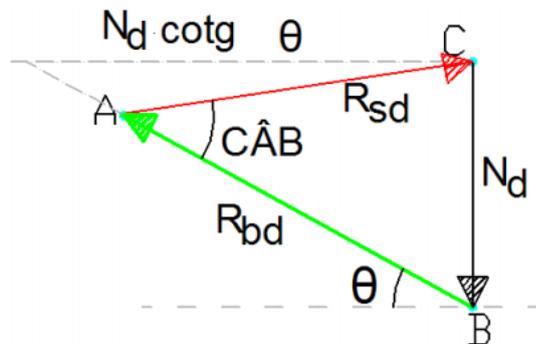
$$a_b \geq \frac{N_d}{0,60 \cdot f_{cd} \cdot b_w}$$

Em virtude dos limites, citados anteriormente, para o valor de  $\theta$ , nem sempre esta metodologia vai ser válida. Caso a biela for dimensionada e esse valor de  $\theta$  não atender os limites, deve-se fazer o procedimento de cálculo inverso. Encontrando a dimensão da biela com base na dimensão do pilar e em um ângulo adotado, o que resulta em:

$$a_b = \frac{a_p}{\text{sen}\theta} \quad (55)$$

Em virtude da distância entre o pilar e o apoio ser pequena, a biela de compressão acaba transferindo os esforços diretamente para o pilar, com inclinação em relação ao eixo longitudinal da viga determinado pelo ângulo  $\theta$ . Esta biela resulta em duas componentes de força. A força horizontal ( $R_{sd}$ ) é absorvida a partir de um tirante de aço ( $A_s$ ), que se ancora na biela, a partir disto define-se a seguinte equação:

**Figura 29 - Triângulo das forças internas da viga.**



Fonte: Tanno (2012).

$$R_{sd} = N_d \cdot \text{cotg}\theta \quad (56)$$

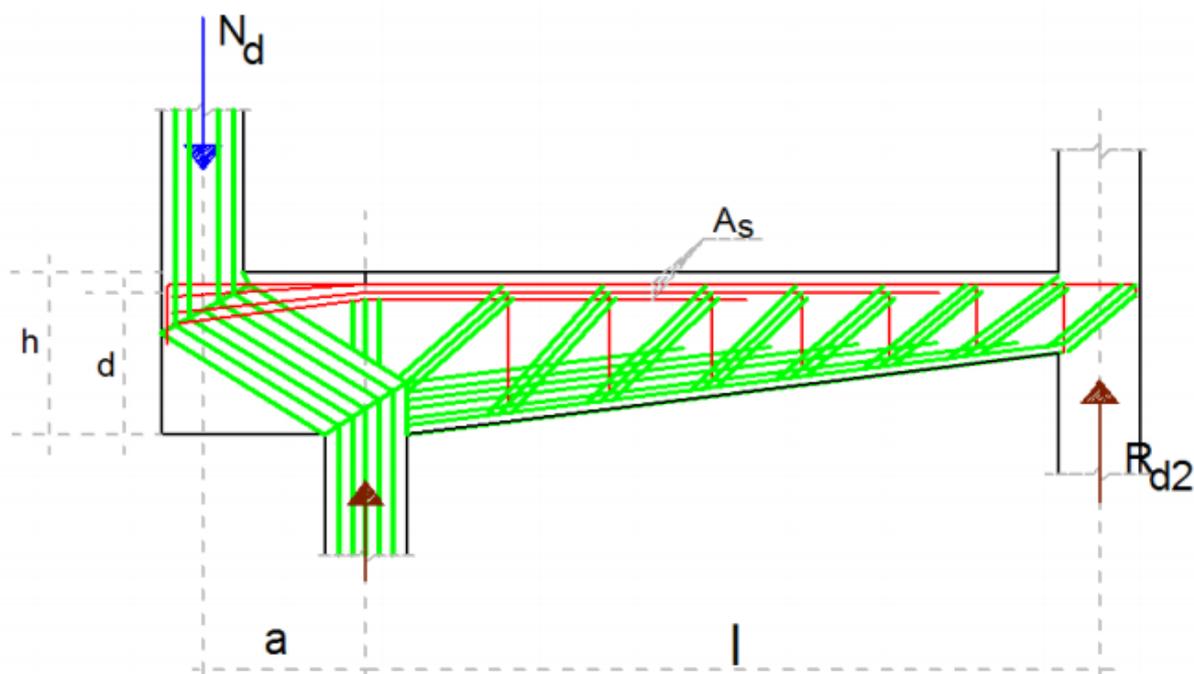
Com o valor de  $R_{sd}$  definido, dimensiona-se a área de aço do seguinte modo:

$$A_s = \frac{R_{sd}}{f_{yd}} \quad (57)$$

Através do equacionamento, percebe-se que com o aumento do ângulo  $\theta$ , a tensão na biela diminui, desta maneira recomenda-se usar o menor ângulo possível,

respeitando o limite entre  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , imposto pela NBR 6118:2014. Mas não é aconselhável usar  $\theta_{\min}$  em trechos submetidos a tração axial.

**Figura 30 - Representação do método biela-tirante.**



Fonte: Tanno (2012).

## 4 METODOLOGIA

É definido para aplicação em métodos de cálculos uma viga de equilíbrio localizada na divisa de um terreno. A viga é um elemento da estrutura de fundação, que liga a estaca de divisa a uma estaca interna de um prédio residencial.

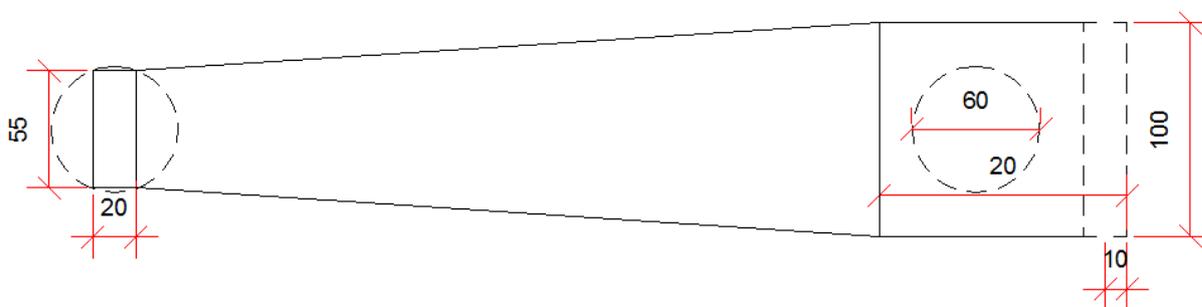
### 4.1 Modelo de aplicação

Segundo Andrade (1989), em um dimensionamento de bloco sobre estaca ou tubulões locados em divisas de terrenos, deve ser feita a verificação de segurança estrutural como consolo, na outra parte da extensão da viga deve ser considerada como viga convencional.

Através de uma decomposição das forças empregadas no pilar por meio de relação de triângulos, define-se a carga do tirante, assim, fazendo o dimensionamento da armadura (ANDRADE, 1989).

A estrutura mostrada na figura 31, apresenta um pilar de divisa com carga vertical de 1556,67 kN, como mostra a figura 32.

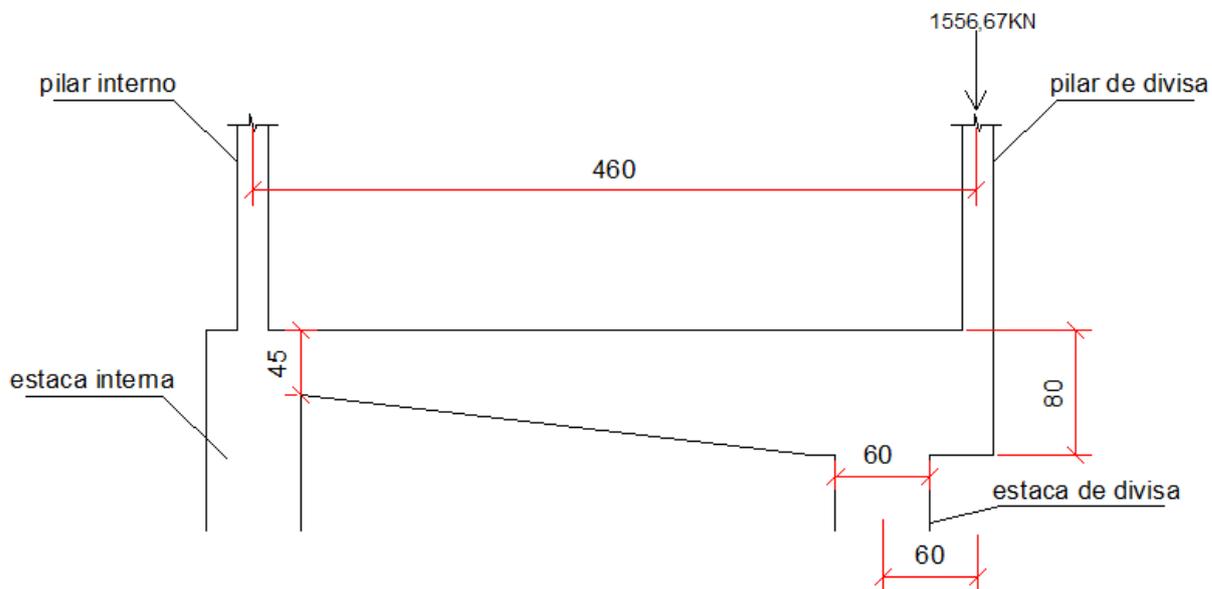
**Figura 31 – Viga de equilíbrio em planta.**



Fonte: Autor.

A altura da viga na divisa do terreno é de 80 cm variando até 45 cm na estaca interna, a figura 33 mostra a vista lateral da estrutura estudada.

**Figura 32 – Estrutura com respectivas cargas.**



Fonte: Autor.

Segundo Andrade (1989), para esta estrutura deve-se considerar o esquema estático da figura 34.

**Figura 33 – Esquema estático.**

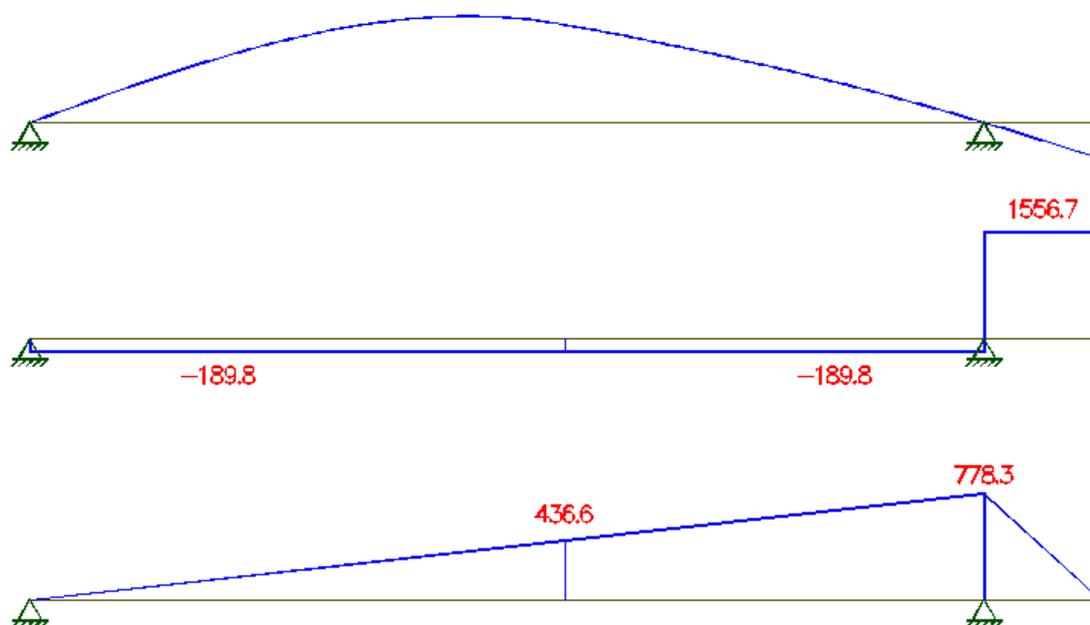


Fonte: Autor extraído do software Ftool.

Este modelo estático considera que a viga está diretamente apoiada no componente de fundação.

Na figura 35 apresenta-se o deslocamento, esforço cortante e momentos fletores da estrutura.

**Figura 34 – Deslocamento, esforço cortante e momentos fletores da estrutura.**



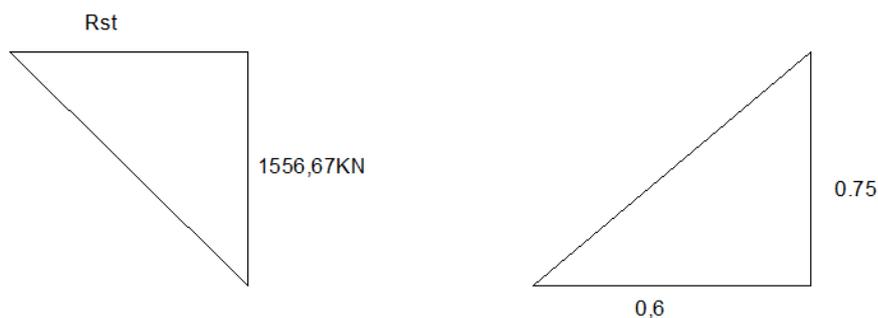
Fonte: Autor extraído do software Ftool.

Pelo deslocamento conclui-se que um lado da estaca está sobre compressão e o outro lado da seção transversal está sobre tração.

#### 4.1.1 Dimensionamento da armadura do consolo

Andrade (1989), considera a relação entre triângulos criados pela força empregada e pela geometria, como mostra a figura 36.

**Figura 35 – Relação de triângulos de forças.**



Fonte: Autor.

Na figura 36 está apresentado a altura útil da viga que é 0,75m e 0,60m a distância entre eixo de pilar e eixo do elemento de fundação. O valor de  $R_{st}$  é a força que será requerida do tirante e 1556,67 kN é a força exercida pelo pilar.

Pela relação trigonométrica da tangente considerando os dois triângulos da figura 36, tem-se:

$$\tan \theta = \frac{1556,67}{R_{st}} \quad (58)$$

$$\frac{0,75}{0,6} = \frac{1556,67}{R_{st}}$$

$$R_{st} = 1245,336KN$$

Com a força  $R_{st}$  é possível calcular a armadura do tirante, através da equação 15.

$$A_s = \frac{R_{st}}{f_{yd}}$$

$$A_s = \frac{1,4 \cdot 1245,336}{43,5}$$

$$A_s = 40,08cm^2 \therefore 13\emptyset 20,0mm (A_{sef} = 40,84cm^2)$$

Inicialmente, verifica-se a taxa de armadura ( $\rho$ ), adotando a área de aço do tirante ( $A_{s,tir}$ ) em relação a área de concreto utilizando a equação 59.

$$\rho = \frac{A_{s,tir}}{A_c} \quad (59)$$

$$\rho = \frac{40,84}{80.100}$$

$$\rho = 0,005 = 0,5\%$$

Com a taxa de armadura já obtida verifica-se o estado limite de cisalhamento através das equações 33 e 35:

$$\tau_{wu} = 3 + 0,9 \cdot \rho \cdot f_{yd} < 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \quad (60)$$

Respeitando o limite de  $\tau_{wd} \leq \tau_{wu}$ , em que:

$$\tau_{wd} = \frac{V_{sd}}{b \cdot d} \quad (61)$$

$$\tau_{wd} = \frac{1,4 \cdot 1556,67}{100 \cdot 75}$$

$$\tau_{wd} = 0,29 \text{ KN/cm}^2$$

Substituindo os valores de  $\tau_{wu}$  e utilizando resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) de 30 MPa, tem-se:

$$\tau_{wu} = 3 + 0,9 \cdot 0,005435 < 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot \frac{30}{1,4} \quad (60)$$

$$\tau_{wu} = 4,95 < 5,09 \therefore \text{está de acordo com o exigido pela NBR 6118: 214}$$

#### 4.1.2 Armadura de costura para consolo curto

Segundo a NBR 9062:2017 para o dimensionamento da armadura de costura para consolos muito curtos ( $a/d \leq 0,5$ ) considera-se:

$$\frac{A_s}{s} \geq 0,5 \cdot \frac{A_s}{d} \quad (62)$$

$$\frac{A_s}{s} \geq 0,5 \cdot \frac{40,84}{0,75}$$

Para armadura de costura em consolo a NBR 9062:2017 exige o espaçamento vertical menor que:

$$s_{vert} \leq \begin{cases} 10 \text{ cm} \\ a = 30 \text{ cm} \end{cases}$$

Respeitando o espaçamento máximo tem-se:

$$\frac{A_s}{s} \geq \frac{27,22 \text{ cm}^2}{m} \therefore \frac{13,61 \text{ cm}^2}{m} \text{ por lado} \therefore \emptyset 10 \text{ mm } c / 10 \text{ cm } (A_{s,ef} = 16,00 \text{ cm}^2 / m) \quad (62)$$

Segundo a NBR 9062:2017 para consolo muito curto esta armadura deve ser empregada em 2/3 da altura útil (d), preenchendo o restante com armadura mínima que é obtida através da equação 63.

$$A_{scost,min} = 0,15 \cdot b \quad (63)$$

$$A_{scost,min} = 0,15.100$$

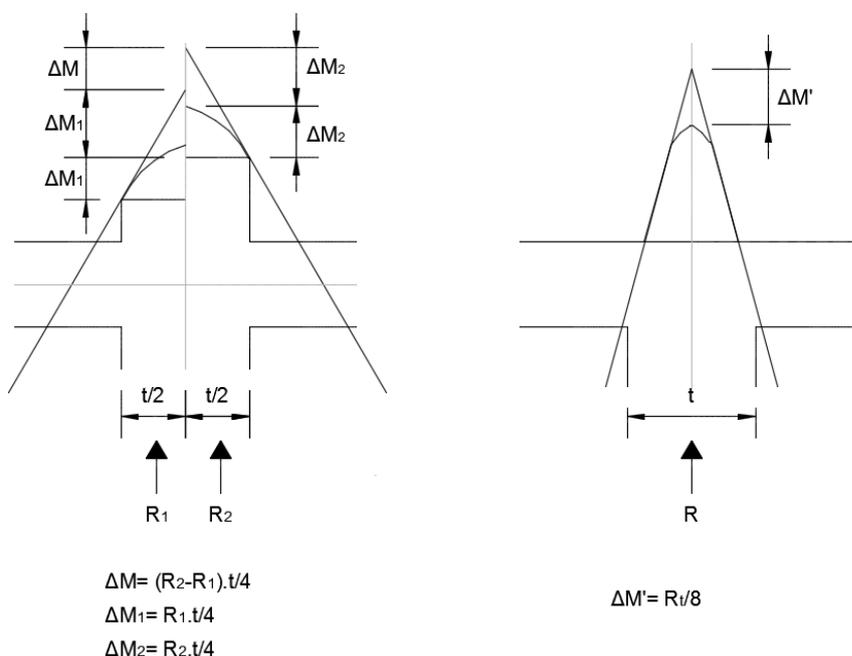
A NBR 6118:2014 exige que o espaçamento máximo entre as barras da armadura de pele não ultrapasse  $d/3$  ou 20cm, então temos:

$$A_{scost,min} = \frac{15cm^2}{m} \therefore \phi 10,0mm \text{ c/ } 20cm (A_{s,ef} = 8,0cm^2/m)$$

#### 4.1.3 Armadura Fora do Console

Segundo a NBR 6118:2014, em nós, sobre apoios e ponto de aplicação de cargas, pode ser realizado um arredondamento dos momentos fletores, através das seguintes equações, baseado na figura 36:

**Figura 36 - Arredondamento de momentos fletores.**



Fonte: Adaptado pelo autor com base em NBR 6118:2014.

$$\Delta M' = \frac{R \cdot t}{8} \tag{64}$$

$$\Delta M' = \frac{1746,50 \cdot 60}{8}$$

$$\Delta M' = 130,98 \text{ kN.m}$$

Subtraindo o valor encontrado do momento máximo da estrutura. Tem-se o momento utilizado para o dimensionamento:

$$M_k = M - \Delta M = 778,3 - 130,98 = 647,32 \text{ KN.m} \quad (65)$$

$$M_d = M_k \cdot \gamma = 647,32 \cdot 1,4 = 906,248 \text{ kN.m}$$

A armadura longitudinal resulta em:

$$A_s = 29 \text{ cm}^2 \therefore 10 \text{ } \emptyset 20,0\text{mm} (A_{s,ef} = 31,5\text{cm}^2)$$

Considerando a facilidade construtiva adota-se a mesma armadura do console ou seja 13  $\emptyset 20,0\text{mm}$ .

#### 4.1.4 Armadura Mínima

Com base na tabela 1, obtêm-se que para concreto com  $f_{ck}$  igual a 30 MPa deve-se adotar uma armadura mínima igual a 0,15% da área de concreto, aplicando esse valor a equação.

$$\rho = 0,15\%$$

$$A_{s,min} = 0,15\% \cdot A_c \quad (66)$$

$$A_{s,min} = 0,0015 \cdot 100,80$$

$$A_{s,min} = 12,00\text{cm}^2$$

Como a armadura longitudinal ( $A_s$ ) é maior que a armadura mínima ( $\rho$ ), adota-se o valor de  $A_s$ .

#### 4.1.5 Armadura de Pele

Como a maior parte da viga, fora do consolo, tem altura superior a 60 cm a NBR 6118:2014 exige que seja dimensionada uma armadura de pele, através da equação 67.

$$A_{s,pele} = 10\% A_c \text{ por face} \quad (67)$$

$$A_{s,pele} = \frac{0,10}{100} \cdot 80.100$$

$$A_{s,pele} = 8\text{cm}^2/\text{face}$$

#### 4.1.6 Armadura Transversal

Segundo NBR 6118:2014, o modelo I de dimensionamento do esforço cortante adota o ângulo da biela comprida igual a  $45^\circ$ , então determina-se o esmagamento da biela de compressão através da equação 33:

a) para a menor seção da viga:

$$V_{Rdu} = \left[ 0,27 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot \frac{f_{ck}}{1,4} \cdot 0,1 \right] \cdot b_w \cdot d$$

$$V_{Rdu} = \left[ 0,27 \cdot \left( 1 - \frac{30}{250} \right) \cdot \frac{30}{1,4} \cdot 0,1 \right] \cdot 55.40$$

$$V_{Rd2} = 1120,11\text{kN}$$

b) no centro longitudinal da viga:

$$V_{Rdu} = \left[ 0,27 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot \frac{f_{ck}}{1,4} \cdot 0,1 \right] \cdot b_w \cdot d$$

$$V_{Rdu} = \left[ 0,27 \cdot \left( 1 - \frac{30}{250} \right) \cdot \frac{30}{1,4} \cdot 0,1 \right] \cdot 83,7.60$$

$$V_{Rd2} = 2556,91\text{kN}$$

c) no console:

$$V_{Rdu} = \left[ 0,27 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot \frac{f_{ck}}{1,4} \cdot 0,1 \right] \cdot b_w \cdot d$$

$$V_{Rdu} = \left[ 0,27 \cdot \left( 1 - \frac{30}{250} \right) \cdot \frac{30}{1,4} \cdot 0,1 \right] \cdot 55.40$$

$$V_{Rd2} = 3818,57\text{kN}$$

Majorando as forças cortantes da estrutura, mostradas na figura 34:

a) para a menor seção da viga:

$$V_{sd} = V_{sk} \cdot 1,4$$

$$V_{sd} = 189,8.1,4$$

$$V_{sd} = 265,72KN$$

b) no centro longitudinal da viga:

$$V_{sd} = V_{sk} \cdot 1,4$$

$$V_{sd} = 189,8.1,4$$

$$V_{sd} = 265,72KN$$

c) no console:

$$V_{sd} = V_{sk} \cdot 1,4$$

$$V_{sd} = 1556,7.1,4$$

$$V_{sd} = 2179,38KN$$

Segundo a NBR 6118:2014, para o modelo I de dimensionamento, defini-se o valor da resistência do concreto a força cortante através da equação 35:

a) para a menor seção da viga:

$$V_c = \frac{\left(0,6.0,21.f_{ck}^{\frac{2}{3}}.0,1\right).b_w.d}{1,4}$$

$$V_c = \frac{\left(0,6.0,21.30^{\frac{2}{3}}.0,1\right).55.40}{1,4}$$

$$V_c = 191,17KN$$

b) no centro longitudinal da viga:

$$V_c = \frac{\left(0,6 \cdot 0,21 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \cdot 0,1\right) \cdot b_w \cdot d}{1,4}$$

$$V_c = \frac{\left(0,6 \cdot 0,21 \cdot 30^{\frac{2}{3}} \cdot 0,1\right) \cdot 83,7 \cdot 60}{1,4}$$

$$V_c = 436,38 \text{ KN}$$

c) no console:

$$V_c = \frac{\left(0,6 \cdot 0,21 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \cdot 0,1\right) \cdot b_w \cdot d}{1,4}$$

$$V_c = \frac{\left(0,6 \cdot 0,21 \cdot 30^{\frac{2}{3}} \cdot 0,1\right) \cdot 100 \cdot 75}{1,4}$$

$$V_c = 651,71 \text{ KN}$$

Com o valor de  $V_c$  definido, a partir da equação 34 calcula-se a força cortante resistida pelo estribo:

a) para a menor seção da viga:

$$V_{sw} = V_{sd} - V_c$$

$$V_{sw} = 265,72 - 191,17$$

$$V_{sw} = 74,55 \text{ KN}$$

b) no centro longitudinal da viga:

Como no centro da viga somente o concreto suporta o esforço cortante da estrutura é adotada então, a armadura mínima é obtida através da equação 44:

$$A_{sw, \text{mín}} \geq \frac{20 \cdot f_{ct, m}}{f_{ywk}} \cdot b_w$$

$$A_{sw, \text{mín}} \geq \frac{20 \cdot 2,89}{\frac{0,7 \cdot 50}{1,15}} \cdot 0,837$$

$$A_{sw,min} \geq 1,59cm^2/m$$

c) no console:

$$V_{sw} = V_{sd} - V_c$$

$$V_{sw} = 2179,38 - 651,71$$

$$V_{sw} = 1527,67 KN$$

Com o valor de  $V_{sw}$ , calcula-se o estribo utilizando a equação 42:

a) para a menor seção da viga:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9.d.f_{ywd}}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{74,55.100}{0,9.40.43,5}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = 4,76cm^2/m$$

c) No console:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9.d.f_{ywd}}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{1527,67.100}{0,9.75.43,5}$$

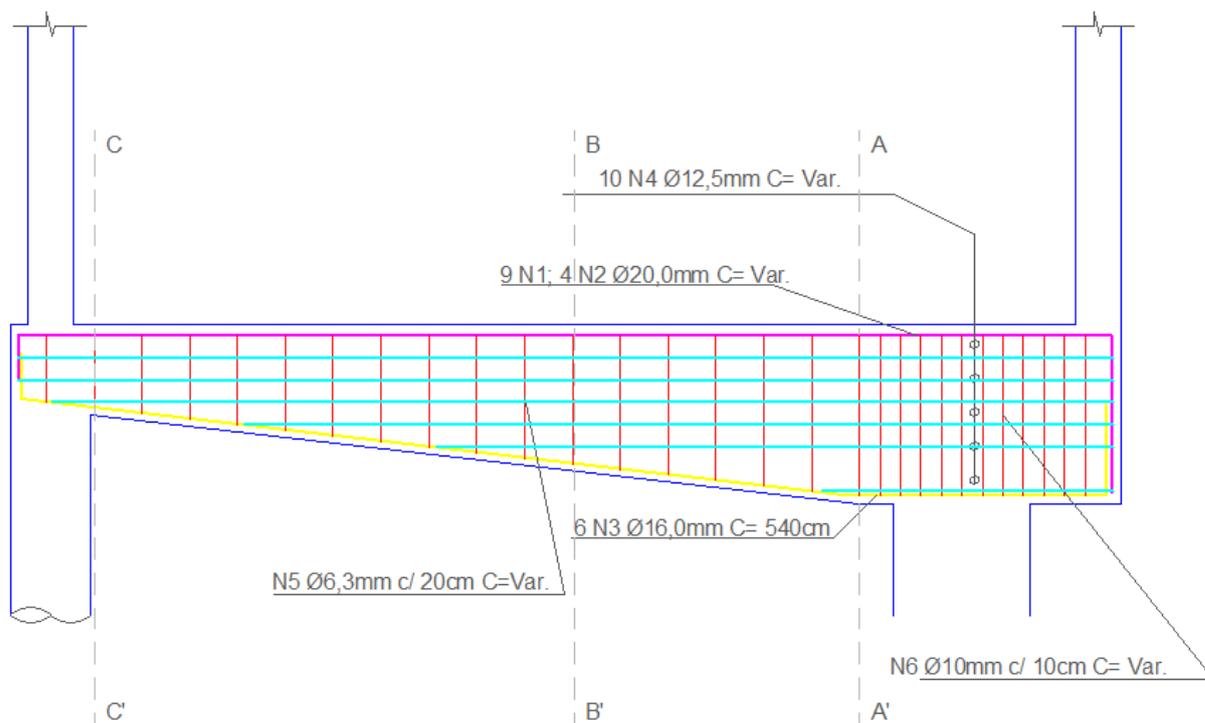
$$\frac{A_{sw}}{s} = 52,03cm^2/m$$

Para a NBR 6118:2014 quando  $V_{sd} < 0,67.V_{rd2}$  o espaçamento máximo dos estribos é 30cm, então, adota-se  $\emptyset 8,0mm$  c/ 21 cm para as seções fora do console. No console deve ser empregado 4 ramos, visto que, para  $V_{sd} > 0,2.V_{rd2}$  o espaçamento máximo entre ramos deve ser 35 cm, considerando isto, temos  $\emptyset 12,5mm$  c/ 9 cm.

Considerando o método executivo foi empregado para o centro da viga o mesmo espaçamento e diâmetro de estribos que na menor seção da viga.

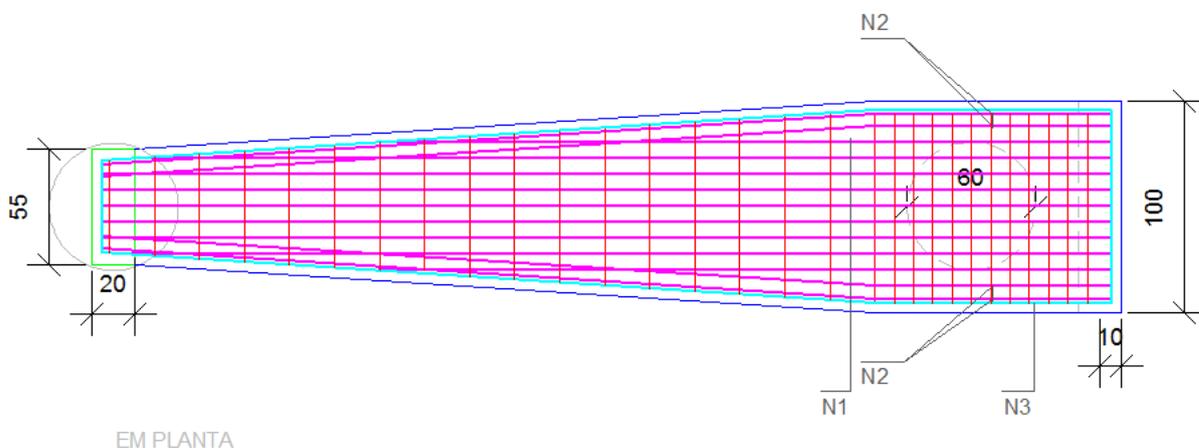
As figuras 37, 38, 39 e 40 mostra o detalhamento do dimensionamento da viga considerada.

**Figura 37 - Detalhamento completo da viga.**



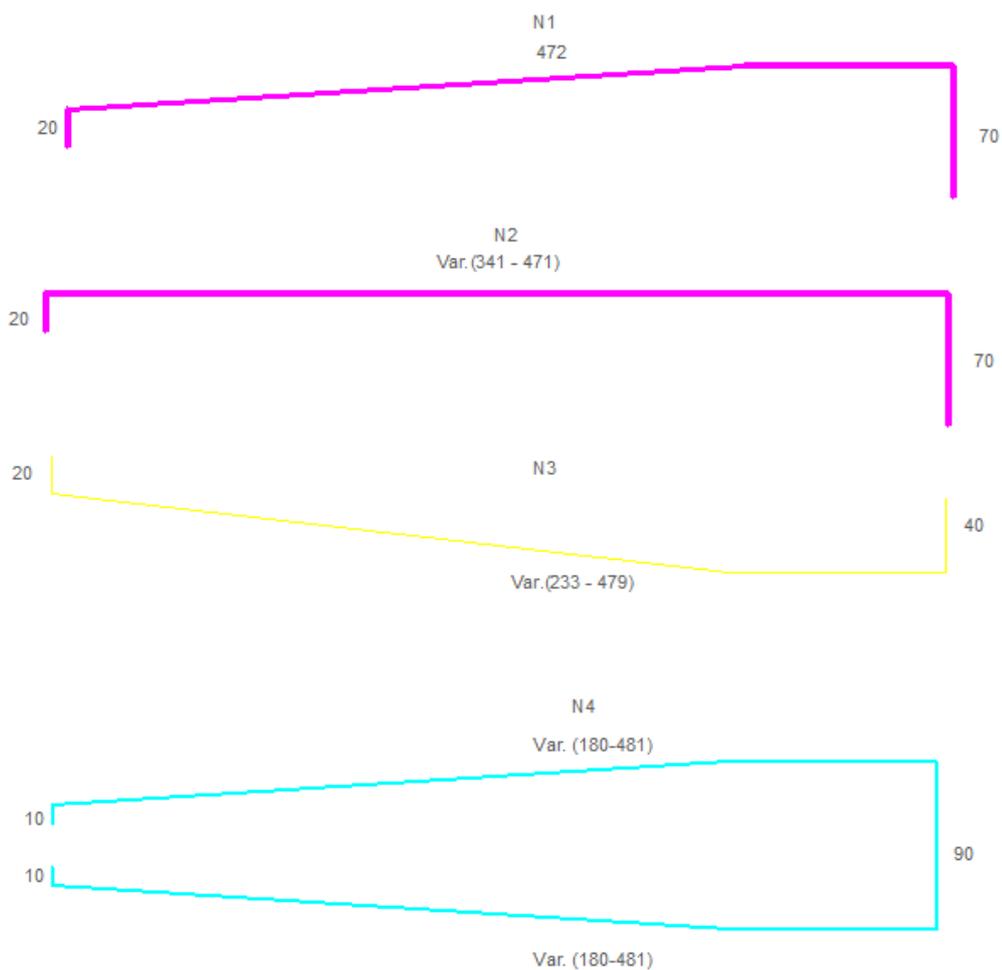
Fonte: Autor.

**Figura 38 - Detalhamento completo da viga.**



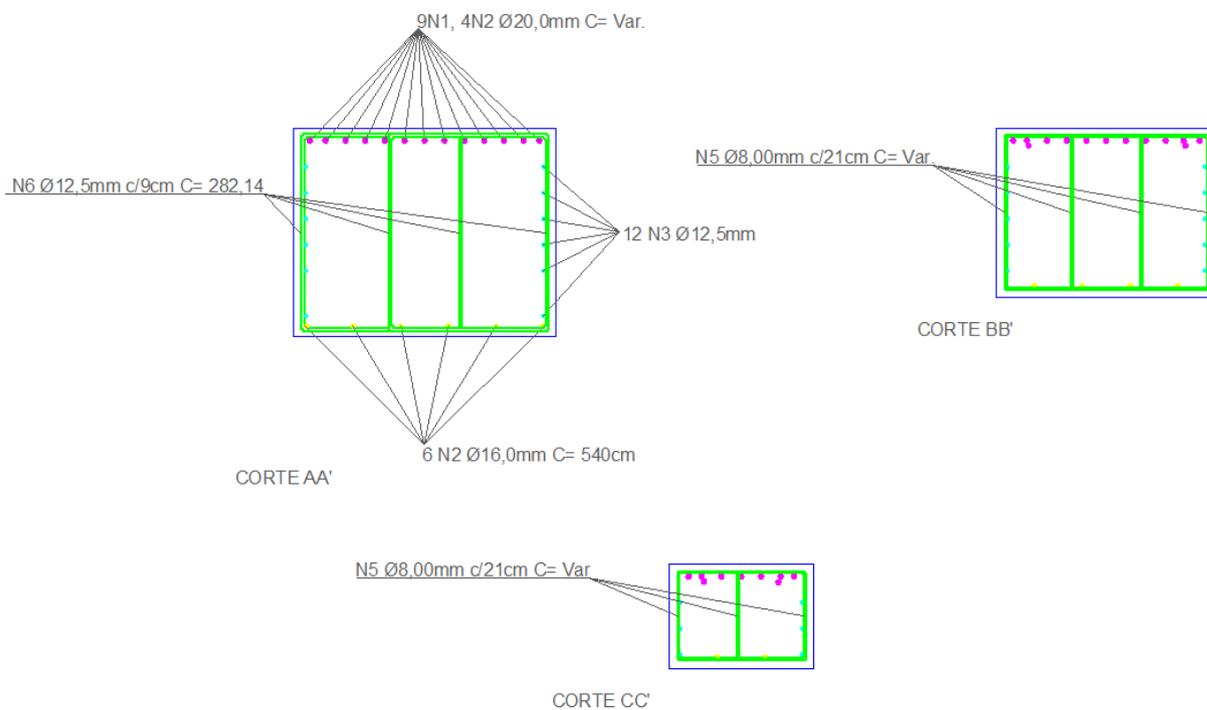
Fonte: Autor.

**Figura 39 - Detalhamento das armaduras longitudinais.**



Fonte: Autor.

**Figura 40 - Detalhamento das armaduras transversais.**



Fonte: Autor.

**Figura 41 - Detalhamento dos estribos.**



Fonte: Autor.

## 4.2 Método de burke

O que diferencia o método de Burke ao de Andrade é somente o dimensionamento da armadura do tirante, visto que, o resto dos esforços é tratado de mesmo modo e dimensionados conforme NBR 6118:2014 e NBR 9062:2017.

Para este método é utilizado a mesma estrutura das figuras 32 e 33 e a força característica é 1556,67 kN.

Inicialmente calcula-se a largura da biela comprimida através da equação 54.

$$a_b = \frac{N_d}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \sin \theta}$$

$$a_b = \frac{1556,67}{0,85 \cdot \frac{3}{1,4} \cdot 100 \cdot \sin 45}$$

$$a_b = 12,89 \text{ cm}$$

Com o valor da largura da biela de compressão calcula-se a tensão exercida sobre o concreto através da equação 69.

$$\sigma_c = \frac{N_d}{a_b \cdot b_w} \quad (69)$$

$$\sigma_c = \frac{1556,67}{12,89 \cdot 100}$$

$$\sigma_c = 1,2 \text{ kN/cm}^2$$

Com o valor da tensão de cálculo na biela de compressão verifica-se a resistência do concreto de acordo com a equação 53.

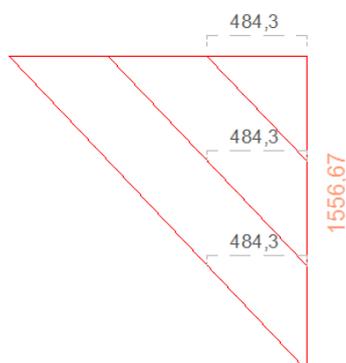
$$\sigma_c \leq 0,85 \cdot f_{cd}$$

$$1,2 \leq 0,85 \cdot \frac{3}{1,4}$$

$$1,2 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,82 \text{ kN/cm}^2 \therefore \text{ o concreto resiste a tensão na biela comprimida}$$

Com as verificações feitas pode-se definir a tensão de do tirante através de uma relação de triângulos onde uma das arestas é a força exercida pelo pilar, como mostra a figura 42.

**Figura 42 – Força de tração por camada de tirante.**



Fonte: Autor.

Calcula-se a armadura de cada tirante através da equação 15.

$$A_s = \frac{R_{st}}{f_{yd}}$$

$$A_s = \frac{484,3}{43,5}$$

$$A_s = 11,13\text{cm}^2$$

Esta área de aço resulta em 4Ø20,0mm por camada de aço, ou seja, 12Ø20,0mm para resistir ao esforço de tração.

### 4.3 Considerações quanto aos métodos estudados

Os dois métodos aplicados neste trabalho utilizaram a mesma estrutura para dimensionamento das áreas de aço. Onde só se diferenciam no dimensionamento do tirante.

Por mais que o método de Burke e o de Andrade sejam distintos quando se trata do dimensionamento do tirante, a diferença realmente relevante é quanto a distribuição da armadura do tirante. Onde Burke exige que o tirante seja distribuído em três camadas de aço e Andrade não estabelece esta configuração. Outro fator relevante que se pode perceber é que Andrade é mais tradicional ao mecanismo proposto, já que a área de aço resultou em maior quantidade.

Embora se demonstre mais conservador o método de Andrade tem aplicação mais simples para dimensionamento da área do tirante.

## 5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho foi de grande importância para o acadêmico, visto que, o elemento estrutural estudado é muito usado atualmente, este tipo de viga engloba diversos tipos de esforços e dimensionamentos, junto com isso diversos arranjos construtivos.

É difícil propor um modelo matemático que retrate exatamente a estrutura. No entanto, verificando os dimensionamentos realizados neste trabalho, os métodos aplicados se mostraram satisfatórios.

Através dos cálculos, observa-se que quanto maior a inclinação da biela de compressão, menor será a área de aço, porém para que isto ocorra, a altura da viga deve-se adequar ao ângulo. Entende-se que quando aumentar a inclinação da biela, o volume de concreto conseqüentemente aumenta.

Através da análise anterior, verifica-se que quando necessário aumentar a seção da estrutura a melhor opção é aumentar a altura da viga, visto que, esta além de contribuir na redução da tensão suportada pelo aço também aumenta a capacidade de resistência do concreto.

As vigas de equilíbrio são uma solução quando interessante quando há presença de pilares de divisa no projeto arquitetônico. As vigas de equilíbrio demandam considerações de cálculo que não são usuais em vigas comuns de edificações, como armadura de tração do tirante, armadura de costura para consolo curto e largura da biela de compressão.

O trabalho auxilia para esclarecer a aplicação dos métodos, tal como o correto comportamento da estrutura que deve ser levado em conta. Além disso, contribui no estudo do dimensionamento, visto que o estudo sobre estas estruturas é carente.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, J. R. L. *Dimensionamento estrutural de elementos de fundação*. São Carlos: EESC - USP, 1989.

ARAÚJO, J. M. *Curso de concreto armado*. 4 ed. Vol. 1. Rio Grande: Dunas, 2014.

ARAÚJO, J. M. *Curso de concreto armado*. 4 ed. Vol. 2. Rio Grande: Dunas, 2014.

ARAÚJO, J. M. *Curso de concreto armado*. 4 ed. Vol. 4. Rio Grande: Dunas, 2014.

ARAÚJO, J. M. *Projeto de Concreto Armado*. 3 ed. Rio Grande: Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto*. Rio de Janeiro 2014.

\_\_\_\_\_. *NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações*. Rio de Janeiro 1980.

\_\_\_\_\_. *NBR 6122: Projeto e execução de fundações* . Rio de Janeiro 1986.

\_\_\_\_\_. *NBR 6122: Projeto e execução de fundações* . Rio de Janeiro 1996.

\_\_\_\_\_. *NBR 6122: Projeto e execução de fundações* . Rio de Janeiro 2010.

\_\_\_\_\_. *NBR 9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado*. Rio de Janeiro 2017.

BURKE, J. R. Roteiro para cálculo de viga alavanca. São Paulo: Itaú S.A. Planejamento e Engenharia, 1979.

CAMPOS, J. C. *Elementos de Fundações em Concreto*. São Paulo: Oficina de Texto, 2015.

CHING, F.; ONOUYE, B.; ZUBERBUHLER, D. *Sistemas estruturais ilustrados: padrões, sistemas e projeto*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

DONIN, Christian. *Estruturas de concreto I*. Notas de aula do curso de Engenharia Civil. Santa Cruz do Sul: UNISC, 2015.

GUERRIN, A.; LAVAUUR, R. C. *Tratado de Concreto Armado*. 1 ed. Vol. 1. São Paulo: Hemus. 2002

LEONHARDT, F; MÖNNIG, E. *Construções de Concreto*. 2 ed. Vol. 1 Rio de Janeiro: Interciência, 2008.

LOPES, F. R.; VELLOSO, D. A. *Fundações: critérios de projeto, investigação do subsolo, fundações superficiais*. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2012.

MODESTO SANTOS, Lauro. *Cálculo de Concreto Armado*. 1. ed. Vol. 1 São Paulo: Editora Blutchter, 1977.

TANNO, D. C. S. *Blocos de concreto sobre estacas posicionados nas divisas de terrenos: estudo analítico e análise numérica linear*. 2012. 240 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade de São Paulo, 2012.

