



CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

Douglas Antoninho Pagani de Castro

**ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS DE CÁLCULO DE FLECHA
EM VIGAS DE CONCRETO**

Santa Cruz do Sul

2024

Douglas Antoninho Pagani de Castro

**ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS DE CÁLCULO DE FLECHA
EM VIGAS DE CONCRETO**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade de Santa Cruz do Sul para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Christian Donin

Santa Cruz do Sul
2024

Confie no processo. A jornada pode ser longa, mas é através da perseverança e da dedicação que alcançamos nossos maiores objetivos.

Autor: Bradley Whitford

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me proteger em todos os quilômetros que percorri diariamente nestes anos, enfrentando chuva, frio e momentos tensos, permitindo que eu fosse à faculdade e retornasse em segurança para casa.

Agradeço aos meus pais, Paulo e Clair, e toda a minha família, por todo apoio a cada dia que passei na faculdade. Sempre me incentivaram, dizendo que eu podia alcançar meus objetivos.

Agradeço a todos meus amigos que estiveram nesta jornada, por todo apoio e incentivo, sempre que eu me encontrava em momentos de baixa, vocês estavam presentes, e isso foi essencial.

Agradeço a todos meus amigos que pude fazer na faculdade, e que vou levar para sempre, com vocês, tudo se tornou mais fácil dentro da faculdade.

Agradecer também a todos os professores que tive até aqui, por todo conhecimento compartilhado. Em especial, ao professor Dr. Christian Donin, por sempre estar disponível e ajudando para que esse trabalho fosse concluído.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar os resultados práticos obtidos de ensaios e comparar com duas equações de momento de inércia equivalente para o cálculo de flechas em vigas biapoiadas de concreto armado, além de realizar um estudo comparativo. A primeira equação, de Branson (1965), é amplamente utilizada em diversos países e está presente na norma brasileira NBR 6118:2023. A segunda equação foi desenvolvida a partir de um estudo mais recente, proposto por Bischoff (2005). Para concretizar o estudo, foram realizados ensaios com quatro protótipos de vigas de concreto armado, obtendo-se curvas experimentais para comparação. Os dados experimentais das flechas foram obtidos por meio de ensaios de carga, e os resultados dos cálculos, utilizando ambas as equações, foram apresentados em tabelas e gráficos. Além disso, foram considerados diferentes níveis de carga para analisar a precisão e a aplicabilidade de cada equação em situações reais de projeto. Os resultados obtidos através de cálculo geraram um gráfico de Força x Deslocamento, duas curvas analíticas comparadas com as curvas experimentais. Esses resultados mantendo-se próximos até a linha de ruptura das vigas após momento de cálculo apresentaram valores diferentes. A análise revelou que, embora ambas as equações forneçam estimativas aceitáveis, a equação de Bischoff apresentou uma precisão ligeiramente superior em determinado caso.

Palavras-chave: Flechas em vigas de concreto armado; análise comparativa; curvas de Força X Deslocamento; NBR 6118.

ABSTRACT

The main objective of this work was to present the practical results obtained from tests and compare them with two equations of equivalent moment of inertia for calculating deflections in simply supported reinforced concrete beams, as well as to conduct a comparative study. The first equation, by Branson (1965), is widely used in various countries and is included in the Brazilian standard NBR 6118:2023. The second equation was developed based on a more recent study proposed by Bischoff (2005). To carry out the study, tests were conducted on four prototypes of reinforced concrete beams, resulting in experimental curves for comparison. The experimental deflection data were obtained through load tests, and the calculation results using both equations were presented in tables and graphs. Additionally, different load levels were considered to analyze the accuracy and applicability of each equation in real design situations. The results obtained through calculations generated a Force x Displacement graph, with two analytical curves compared to the experimental curves. These results remained close until the breaking point of the beams, after which the calculated moment values differed. The analysis revealed that, although both equations provide acceptable estimates, Bischoff's equation showed slightly superior accuracy in a particular case.

Keywords: Deflections in reinforced concrete beams; comparative analysis; Force vs. Displacement curves; NBR 6118.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Aumento das deformações devido ao efeito da fluência para o concreto sob tensões constantes.	21
Figura 2 - Comportamento Estádio I	24
Figura 3 - Comportamento Estádio II	25
Figura 4 - Comportamento Estádio III	26
Figura 5 - Dimensão dos Protótipo.....	30
Figura 6 - Seção longitudinal dos protótipos	31
Figura 7 - Seção longitudinal dos protótipos	31
Figura 8 -Teste de tração nas barras de aço	32
Figura 9 - Agregados graúdos e miúdos	34
Figura 10 - Secagem dos Agregados.....	35
Figura 11 - Ensaio de compressão dos CPs	37
Figura 12 - Ensaio de compressão diametral CPs	38
Figura 13 - Estribos Ø 5 cm.....	41
Figura 14 - Montagem de ferragens	42
Figura 15 - Armaduras finalizadas.....	42
Figura 16 - Teste Slump.....	43
Figura 17 - Protótipos concretados	44
Figura 18 - Vigas curadas	45
Figura 19 - EMIC modelo GR048.....	46
Figura 20 - Esquema de aplicação de carga.....	47
Figura 21 - Protótipo posicionado.....	48
Figura 22 - Momento de Fissuração 1.....	49
Figura 23 - Momento de Fissuração 2.....	49
Figura 24 - Momento de Ruptura	50

Figura 25 - Dados: Método de cálculo Pontos de aplicação	52
Figura 26 - Dados: Método de cálculo – Branson	54
Figura 27 - Dados: Método de cálculo Brischhoff	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores do coeficiente ε em função do tempo	18
Tabela 2 - Valores característicos superiores da deformação específica de retração $\varepsilon_c(t^\infty, t_0)$ e do coeficiente de fluência $\varphi(t^\infty, t_0)$	21
Tabela 3 - Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto (considerando o uso de granito como agregado graúdo).....	23
Tabela 4 - Resultado dos ensaios de tração das barras de $\varnothing 5,00\text{mm}$	33
Tabela 5 - Resultado dos ensaios de tração das barras de $\varnothing 8,00\text{mm}$	33
Tabela 6 - Resultado dos ensaios de tração das barras de $\varnothing 10,00\text{mm}$	33
Tabela 7 - Ensaio de compressão dos CPs	36
Tabela 8 - Ensaio de compressão diametral CPs Resistência do concreto a Tração	37

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Diagrama de Tensão x Deformação	39
Gráfico 2 - Força X Deslocamento - Experimental	51
Gráfico 3 - Flecha obtida através da equação de Branson	55
Gráfico 4 - Flecha obtida através da equação de Bischoff	56
Gráfico 5 - Momento de Resistência da Viga experimental.....	58
Gráfico 6 - Análise de resultados	60

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CEN	Comitê Europeu de Normalização
ACI	American Concrete Institute
CA	Concreto armado
CPI	Cimento Portland comum
CPII	Cimento Portland composto
CPIII	Cimento Portland de alto forno
CPIV	Cimento Portland pozolânico
CPV-ARI	Cimento Portland de alta resistência inicial
CP	Corpo de Prova
ELS	Estados Limites de Serviço
ELU	Estados Limites Últimos
NBR	Norma Brasileira
UNISC	Universidade de Santa Cruz do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Área de estudo	15
1.2 Limitação do tema	15
1.3 Objetivo geral	15
1.3.1 Objetivos específicos.....	15
1.4 Justificativa.....	15
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	17
2.1 Flechas diferidas	17
2.2. Fatores que influenciam nos deslocamentos	19
2.2.1 Fluência e retração.....	20
2.3. Comportamento não linear do concreto	23
2.3.1. Resistência à compressão	26
2.3.2. Resistência à tração.....	27
2.3.3 Estados-limites de serviço	27
2.4. Rigidez à Flexão	28
3 METODOLOGIA	30
3.1 Especificação dos protótipos	30
3.2 Concepção dos protótipos	31
3.2.1 Materiais.....	32
3.2.2 Aço.....	32
3.2.3 Ensaios de tração nas barras de aço	32
3.2.4 Concreto.....	33
3.2.5 Cimento	34
3.2.6 Agregados.....	34

3.2.7 Dosagem	35
3.2.8 Ensaios dos CPs do concreto.....	36
4 Confeção dos protótipos	40
4.1 1ª Etapa Armaduras.	40
4.2 2ª Etapa Concretagem	43
4.3 3ª Etapa Desforma e cura	44
5 Análise dos protótipos.....	46
5.1 Equipamentos.....	46
5.2 Experimental.....	47
5.3 Resultados obtido dos protótipos	48
6. Cálculo e comparação das flechas das vigas em estudo.....	52
6.1 Equação de Branson – Método utilizado na NBR 6118:2023.....	52
6.2 Equação de Bischoff	55
6.3 Cálculo do Momento de Resistência da Viga experimental	57
7.0 Análise de resultados	59
8. Conclusão.....	62
9 Referência.....	63

1 INTRODUÇÃO

Considerando a importância crucial da estabilidade e durabilidade das estruturas projetadas em concreto armado, este material é amplamente utilizado na construção de diferentes tipos de estruturas.

No entanto, as estruturas de antigamente não apresentavam deformações com deslocamentos excessivos por terem seções mais robustas com sua rigidez mais elevada evitando deslocamentos. Nos dias de hoje foram adotadas vigas mais esbeltas, atendendo as necessidade e economia de materiais, permitindo edificações mais leves e altas. A consequência destas mudanças foi o aumento das fissuras das vigas e aumento de deformações, de acordo com Gilbert (2011), o deslocamento de estruturas não deve prejudicar o funcionamento dela, nem mesmo ser esteticamente inaceitável.

De acordo com o item 6.1 da NBR 6118:2023 “As estruturas de concreto devem ser projetadas e construídas de modo que sob as condições ambientais previstas na época do projeto e quando utilizadas conforme preconizados em projeto conservem sua segurança, estabilidade e aptidão em serviço durante o período correspondente a sua vida útil”.

Cabe destacar com estes novos problemas foram estabelecidos novos cuidado na construção civil de acordo com as Normas Técnicas - ABNT NBR 6118:2023 e o Eurocódigo 2: Projetos de Estruturas de Concreto, Parte 1-1 do Comitê Europeu de Normalização (CEN). Seguindo essa linha, o controle das deformações obtidas através das flechas das vigas em concreto armado, permitindo uma compreensão e comparação entre diversos modelos de cálculo de flecha isto é fundamental para determinar com precisão os níveis de deformação esperados em vigas de concreto, qual o método de melhor precisão levando em consideração fatores como cargas aplicadas, variações de temperatura, retração do concreto, entre outros parâmetros relevantes.

1.1 Área de estudo

A pesquisa do presente trabalho acadêmico foi desenvolvida através de uma análise entre comparações dos métodos de avaliação de flechas de vigas em concreto armado por meio de ensaios.

1.2 Limitação do tema

A avaliação destes dois métodos de análise de flecha, trata-se de uma verificação de qual é o mais assertivo.

1.3 Objetivo geral

Contribuir para o aprimoramento dos modelos de cálculo de deslocamentos de vigas em concreto armado.

1.3.1 Objetivos específicos

A pesquisa tem como objetivos específicos:

Realizar a análise experimental de vigas de concreto armado, visando medir seus deslocamentos sob as cargas aplicadas.

Aplicar os modelos de cálculo de deslocamentos definidos por Branson e Bischoff nos protótipos de vigas ensaiados.

Comparar os resultados experimentais com os resultados obtidos pelos modelos teóricos de Branson e Bischoff, de modo a avaliar as características e o desempenho destes modelos nos protótipos de vigas de concreto armado estudados.

1.4 Justificativa

Esta pesquisa reside na importância de entender e selecionar métodos de análise que forneçam resultados precisos e confiáveis. A capacidade de prever com exatidão as posições nas vigas é vital para garantir a segurança das estruturas, evitando possíveis falhas ou danos estruturais que possam surgir devido a cargas

aplicadas ao longo do tempo. Ao comparar diferentes métodos de avaliação, busca-se identificar qual abordagem é mais assertiva e eficaz na estimativa das flechas, permitindo assim uma tomada de decisão baseada na escolha do método mais adequado para o arranjo estrutural em questão.

É essencial seguir normas técnicas reconhecidas como a NBR 6118:2023 e o Eurocódigo 2, desenvolvido pelo Comitê Europeu de Normalização (CEN), para garantir a segurança, durabilidade e eficiência das estruturas de concreto armado. A adoção dessas normas permite uma identidade nos projetos e facilita a comparação de resultados entre diferentes métodos de cálculo de deformações, como as flechas em vigas.

Além disso, esta pesquisa visa contribuir para o avanço da engenharia civil ao fornecer subsídios para o aprimoramento dos métodos de análise estrutural, possibilitando um controle mais preciso e confiável das deformações em vigas de concreto armado, o que impacta diretamente na segurança e durabilidade das construções.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Comitê Europeu de Normalização (CEN): O CEN é responsável pela elaboração de normas técnicas na Europa, incluindo o Eurocódigo 2, que é uma referência crucial para o projeto de estruturas de concreto. Este código fornece diretrizes detalhadas para garantir que as estruturas atendam aos requisitos de segurança e desempenho durante sua vida útil.

Flecha de Vigas em Concreto Armado: A flecha representa a deformação vertical que ocorre em uma viga devido à aplicação de cargas. Conforme definido pela NBR 6118:2023 e o Eurocódigo 2, é fundamental que essa deformação seja controlada para não comprometer a estética e a funcionalidade da estrutura. O cálculo preciso das flechas considera fatores como cargas aplicadas, variações de temperatura, retração do concreto e outros parâmetros relevantes.

2.1 Flechas diferidas

No campo da engenharia estrutural, a flecha diferida é um especto fundamental a ser considerada, pois impacta diretamente a segurança e durabilidade das estruturas ao longo de sua vida útil. A flecha como pode ser levado em conta no seu arranjo de combinação de carga e longa duração, pode provocar efeitos de retração e fluência do concreto ao longo do tempo.

De acordo com a NBR 6118:2023, a flecha em vigas que surgem decorrente das cargas de grandes durações em função da fluência, podemos calcular através de uma multiplicação de flexas imediatas pelo fator α_f dado pela fórmula abaixo (1):

$$\alpha_f = \frac{\Delta\varepsilon}{1+50p'} \quad (1)$$

Onde:

$$p' = \frac{As'}{bd} \quad (2)$$

ε , é um coeficiente função de tempo, que pode ser obtido diretamente na Tabela 1 ou ser calculado pelas expressões seguintes:

$$\varepsilon = \varepsilon(t) - \varepsilon(t_0) \quad (3)$$

$$\varepsilon(t) = 0,68(0,996^t)t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses}$$

$$\varepsilon(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses}$$

Tabela 1 - Valores do coeficiente ε em função do tempo

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	100
Coeficiente $\varepsilon(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: O autor, 2024

Sendo:

t , o tempo, em meses, quando se deseja valor da flecha diferida;

t_0 , a idade, em meses, no momento da aplicação da carga de longa duração, considerando-se com $t = 0$ o momento da concretagem. No caso de parcelas das cargas de longa duração serem aplicadas em idades diferentes, pode-se tornar para t_0 o valor ponderado a seguir.

$$t^0 = \frac{\sum P_i t_{0i}}{\sum P_i} \quad (4)$$

Onde:

P_i , representa as parcelas de cargas;

t_{0i} , é a idade em que se aplicou cada parcela P_i , expressa em meses.

O valor da flecha total deve ser obtido multiplicando a flecha imediata por $(1+\alpha_f)$.

É essencial adotar monitoramento contínuo e uma abordagem proativa para minimizar os efeitos adversos causados pelo comportamento diferido, garantindo assim a integridade e a resistência das estruturas. Conforme observado por Almeida (2010), ao longo do tempo, os deslocamentos diferidos tendem a ser maiores do que os deslocamentos imediatos. Portanto, é crucial considerar essas flechas diferidas para assegurar a segurança, funcionalidade e durabilidade das estruturas. A negligência desses efeitos pode resultar em problemas significativos, como rachaduras, deformações excessivas e até falhas estruturais.

2.2. Fatores que influenciam nos deslocamentos

A influência nos deslocamentos das vigas de concreto armado, uma ampla gama de variáveis deve ser cuidadosamente considerada. As cargas aplicadas exercem um papel fundamental, pois são responsáveis por gerar as tensões internas que resultam nos deslocamentos estruturais. Além disso, a escolha dos materiais de construção desempenha um papel crucial, influenciando diretamente propriedades como o módulo de elasticidade, a resistência à compressão e à tração.

O módulo de elasticidade do concreto, define sua capacidade de resistir à deformação sob carga, enquanto a resistência à compressão indica sua capacidade de suportar cargas de compressão sem falhar. Por outro lado, a resistência à tração é uma propriedade crítica, especialmente nas partes tracionadas das vigas, onde o concreto tem menor capacidade de resistência.

Além das propriedades materiais, os efeitos de retração e fissuração do concreto são considerações essenciais. A retração ocorre devido à perda de umidade do concreto durante o processo de cura, o que pode levar a deformações iniciais significativas se não forem devidamente compensadas no projeto estrutural. As fissuras podem se desenvolver devido a tensões internas resultantes da retração e das variações térmicas, afetando a durabilidade e estabilidade da estrutura ao longo do tempo.

Outro fenômeno importante a ser considerado é a fluência do concreto, que se refere à deformação contínua que ocorre sob carga constante ao longo do tempo. Embora inicialmente pequena, a fluência pode acumular-se significativamente em estruturas sujeitas a cargas prolongadas, influenciando os deslocamentos totais e exigindo considerações específicas no projeto para garantir que essas deformações não comprometam a segurança e o desempenho estrutural.

A compreensão aprofundada desses elementos é essencial para o desenvolvimento de estruturas que não apenas suportem as tensões aplicadas, mas também mantenham sua estabilidade e durabilidade ao longo de sua vida útil. A equação para calcular a flecha diferida total:

$$\Delta_d = (1 + \alpha_f) \cdot \Delta_i \quad (5)$$

Onde:

Δ_i , representa a flecha imediata devido às cargas aplicadas inicialmente;

α_f , é o fator que considera a contribuição das deformações diferidas devido à fluência e retração do concreto.

2.2.1 Fluência e retração

A fluência é um especto que se manifesta como uma deformação progressiva ao longo do tempo sob carga constante, este comportamento de deformações pode ser influenciado por proporções de cimentos utilizados, agregados e aditivos. Compreender esses diversos fatores é crucial no planejamento e na construção de estruturas sólidas e seguras, garantindo que os efeitos da fluência sejam considerados para evitar problemas como fissuras e falhas estruturais ao longo do tempo.

Segundo Giammusso (1992), a fluência é uma deformação lenta que o concreto apresenta quando é submetido a um carregamento permanente ou de longo prazo.

A NBR 6118:2023, estabelece requisitos específicos para o cálculo e dimensionamento das estruturas de concreto, incluindo a consideração da fluência, essas deformações podem ser calculadas simplificadamente como representado na fórmula abaixo.

$$\varepsilon_c(t^\infty, t_0) = \sigma_c(t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t^\infty, t_0)}{E_c(28)} \right] \quad (6)$$

Onde:

$\varepsilon_c(t^\infty, t_0)$, é a deformação específica total do concreto entre os instantes t_0 e t^∞ ;

$\sigma_c(t_0)$, é a tensão no concreto devida ao carregamento aplicado em t_0 ;

$\varphi(t^\infty, t_0)$, é o limite para qual tende o coeficiente de fluência provocado por carregamento aplicado em t_0 ;

O valor de $\varphi(t^\infty, t_0)$ pode ser calculado por interpolação dos valores da Tabela 2. Essa tabela fornece o valor característico superior de $\varphi(t^\infty, t_0)$ em algumas situações usuais.

O valor característico inferior de $\varphi(t^\infty, t_0)$ é considerado nulo.

A Tabela 2 fornece o valor do coeficiente de fluência $\varphi(t^\infty, t_0)$ e da deformação específica de retração $\varepsilon_{cs}(t^\infty, t_0)$ em função da umidade média ambiente e da espessura fictícia $2Ac/u$, onde Ac é a área da seção transversal e u é o perímetro da seção em contato com a atmosfera. Os valores desta Tabela são relativos a temperaturas do concreto entre 10 °C e 20 °C, podendo-se, entretanto, admiti-los como válidos para temperaturas entre 0 °C e 40 °C. Esses valores são válidos para concretos plásticos e de cimento Portland comum.

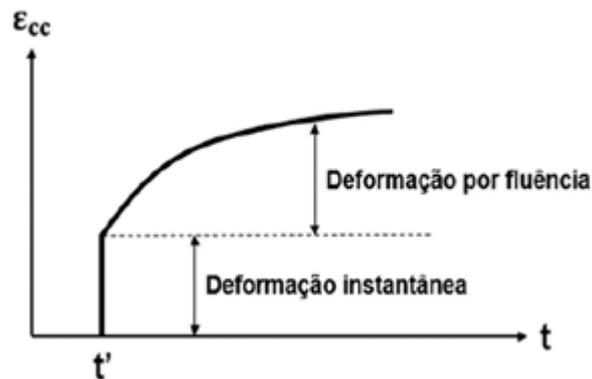
Tabela 2 - Valores característicos superiores da deformação específica de retração $\varepsilon_c(t^\infty, t_0)$ e do coeficiente de fluência $\varphi(t^\infty, t_0)$

Umidade média ambiente (%)		40		55		75		90		
		20	60	20	60	20	60	20	60	
Espessura fictícia $2Ac/u$ (cm)										
$\varphi(t^\infty, t_0)$ Concreto das classes C20 a C45	t^0 dias	5	4,6	3,8	3,9	3,3	2,8	2,4	2,0	1,9
		30	3,4	3,0	2,9	2,6	2,2	2,0	1,6	1,5
		60	2,9	2,7	2,5	2,3	1,9	1,8	1,4	1,4
$\varphi(t^\infty, t_0)$ Concreto das classes C50 a C90		5	2,7	2,4	2,4	2,1	1,9	1,8	1,6	1,5
		30	2	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,1	1,1
		60	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,2	1,0	1,0
$\varepsilon_{cs}(t^\infty, t_0) \% \text{‰}$		5	-0,53	-0,47	-0,48	-0,43	-0,36	-0,32	-0,18	-0,15
		30	-0,44	-0,45	-0,41	-0,41	-0,33	-0,31	-0,17	-0,15
		60	-0,93	-0,43	-0,36	-0,40	-0,30	-0,31	-0,17	-0,15

Fonte: O autor, 2024

Lazzari (2015) observou que o comportamento do concreto sob cargas prolongadas exibe uma resposta única. Inicialmente, ocorre uma deformação instantânea quase imediata devido à aplicação da carga. Subsequentemente, começa um processo de deformação gradual que se prolonga ao longo do tempo. Este fenômeno é conhecido como fluência, no qual a estrutura continua a se deformar lentamente sob a carga constante, mostrando o comportamento viscoelástico característico do material. Uma característica principal é o aumento das deformações devido ao efeito de tensões constantes, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Aumento das deformações devido ao efeito da fluência para o concreto sob tensões constantes.



Fonte: Lazzari, 2015

O módulo de elasticidade E_{ci} deve ser determinado conforme o método de ensaio especificado na ABNT NBR 8522:2021, que considera o módulo de deformação tangente inicial, obtido aos 28 dias de idade como norma aplicável. Na ausência de ensaios realizados, é possível estimar o valor do módulo de elasticidade inicial utilizando as expressões a seguir:

$$E_{ci} = \alpha E \cdot \sqrt{5600} f_{ck} \text{ para } f_{ck} \text{ de } 20 \text{ MPa a } 50 \text{ MPa}; \quad (7)$$

Onde:

$\alpha E = 1,2$ para basalto e diabásio

$\alpha E = 1,0$ para granito e gnaisse

$\alpha E = 0,9$ para calcário

$\alpha E = 0,7$ para arenito

E_{ci} e f_{ck} são dados em megapascal (MPa).

O módulo de deformação secante pode ser obtido de acordo com o método de ensaio estabelecido na ABNT NBR 8522:2021 ou pode ser estimado utilizando a seguinte expressão:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (8)$$

Onde:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{F_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (9)$$

Tabela 3 - Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto (considerando o uso de granito como agregado graúdo)

Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C60	C70	C80	C90
Eci Gpa	25	28	31	33	35	38	40	42	43	45	47
Ecs Gpa	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	47
α_i	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,93	0,95	0,98	1,00	1,00

Fonte: O autor, 2024

O módulo de elasticidade é uma propriedade que caracteriza a capacidade do concreto de resistir às deformações, sendo frequentemente representado por (E). Este módulo expressa a habilidade do concreto de se deformar e pode variar dependendo da composição do concreto, como a proporção de cimento, água, agregados e aditivos. Por exemplo, concretos com maior proporção de cimento e menor porosidade tendem a apresentar um módulo de elasticidade mais alto.

A Lei de Hooke é essencial para prever o comportamento elástico do concreto, enquanto a resistência à compressão, medida pelo F_{ck} , é crucial para o projeto de estruturas em conformidade com as diretrizes da NBR 6118:2023. A determinação precisa do módulo de elasticidade inicial do concreto, por meio das equações previstas pela NBR 8522:2021, é vital para avaliar suas propriedades mecânicas ao longo do tempo, enfatizando a importância de práticas de construção adequadas. A relação básica que descreve a deformação elástica sob flexão é fundamental. Pode ser expressa como:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (10)$$

Onde:

σ , é o esforço de tensão;

E , é o módulo de elasticidade do material;

ε , é a deformação.

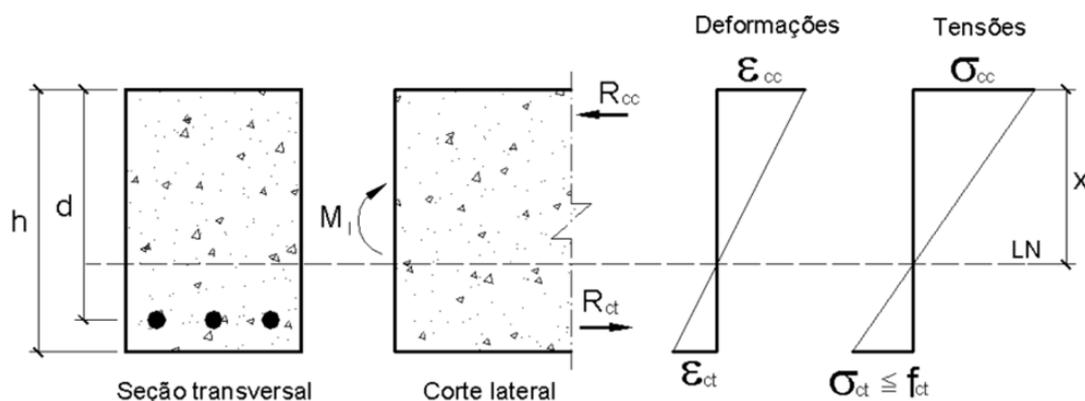
2.3. Comportamento não linear do concreto

A fissuração é um fenômeno inevitável em estruturas de concreto armado, conforme a ABNT NBR 6118:2023, devido à variabilidade das cargas que esses elementos suportam ao longo de sua vida útil. Enquanto o concreto apresenta boa resistência à compressão, sua resistência à tração é significativamente menor, aproximadamente 1/10 da resistência à compressão. Portanto, esses elementos podem enfrentar tensões críticas de tração.

Além da variação de carregamento, fatores como a taxa de armadura influenciam as diferentes fases que as estruturas de concreto armado podem passar. Essas fases são ilustradas e melhor compreendidas visualmente pelas figuras abaixo, divididas em Estádio I, Estádio II e Estádio III do concreto.

Estádio I: De acordo com Pinheiro (2007), o estágio I representa o início do carregamento, caracterizado por tensões de baixa magnitude. Neste estágio, a resistência à tração do concreto é totalmente considerada para a resistência da seção, seguindo um diagrama linear de tensões, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Comportamento Estádio I



Fonte: Pinheiro, 2007

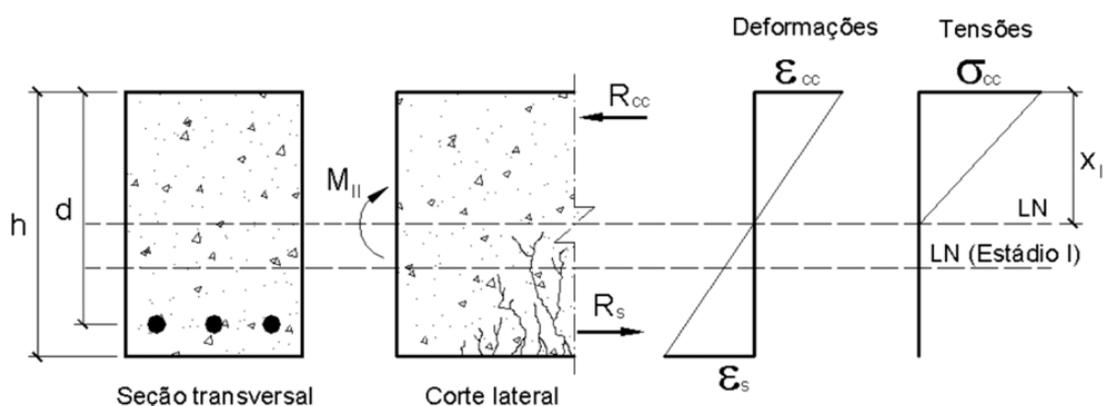
O estágio I e o estágio II são separados pelo momento de fissuração. Quando o momento aplicado ultrapassa o momento de fissuração, a peça passa a trabalhar no estágio II, com o concreto já fissurado.

Estádio II: No estágio II, as tensões na região tracionada do concreto superam sua resistência à tração, levando à fissuração. Por questões de simplificação e segurança, nesta fase, o concreto é completamente desconsiderado na região abaixo

da linha neutra (região tracionada). Apesar disso, conforme observado na Figura 3 da tensão-deformação, o concreto ainda apresenta resistência à tração, mesmo operando no estágio II.

Neste estágio, a inércia da seção é reduzida para não considerar o concreto tracionado. Entretanto, como demonstrado, o concreto tracionado ainda contribui para a resistência da seção. Para lidar com essa complexidade, Branson (1963) desenvolveu uma formulação para determinar uma inércia efetiva que medeia entre a inércia bruta e a inércia da seção fissurada, conforme detalhado na seção equação de Branson.

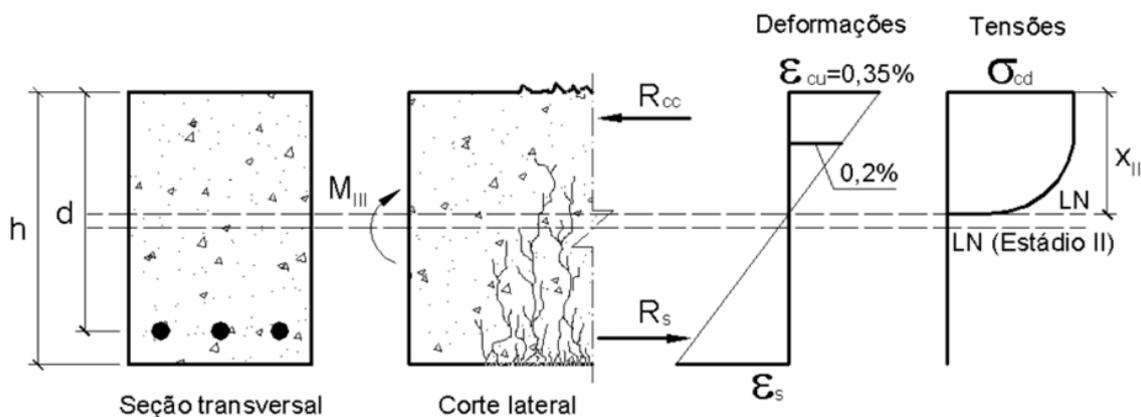
Figura 3 - Comportamento Estádio II



Fonte: Pinheiro, 2007

Estádio III: O estágio III representa a condição em que a zona comprimida está plastificada e o concreto nessa região está próximo da ruptura. Segundo Pinheiro (2007), o diagrama de tensões neste estágio assume a forma de uma parábola-retângulo, conforme demonstrado na Figura 4.

Figura 4 - Comportamento Estádio III



Fonte: Pinheiro, 2007

2.3.1. Resistência à compressão

O concreto é submetido a uma força ou carga, pode vir a sofrer deformações, esta deformação do material pode ser temporária, no entanto tem a sua capacidade de retorna a forma original após a remoção da carga. Essa propriedade é denominada tensão de elasticidade e é regida pelo módulo de elasticidade do concreto.

$$\sigma_{ct} = E_{ce} \varepsilon_{ct} \quad (11)$$

σ_{ct} , é a tensão de compressão no concreto;

E_{ce} , é o módulo de elasticidade efetivo do concreto;

ε_{ct} , é a deformação de compressão;

Para a região tracionada do concreto:

$$\sigma_{ct} = E_{ce} \varepsilon_{ct} \quad (12)$$

Sendo:

σ_{ct} , é a tensão de tração no concreto;

E_{ce} , é o módulo de elasticidade efetivo do concreto;

ε_{ct} , é a deformação de tração;

σ , coeficiente de fluência;
 f_{ct} , resistência à tração do concreto.

2.3.2. Resistência à tração

A fissuração desempenha um papel crucial no estudo dos deslocamentos, pois indica o início do processo de fissuração. A partir do surgimento dessas fissuras, ocorre uma diminuição na rigidez e um aumento nos deslocamentos das vigas de concreto armado. Tanto o método de Branson (1965) quanto o de Bischoff (2005) consideraram esse efeito em seus cálculos.

De acordo com a NBR 6118, uma das etapas para calcular as flechas envolve determinar a resistência à tração, que pode ser expressa pela Equação (13), onde o valor de F é dado em megapascais (MPa).

Para as vigas analisadas, foram utilizados concretos de classes até C50, portanto:

$$F_{ct} = 0,3F_{ct}^{\frac{2}{3}} \quad (13)$$

2.3.3 Estados-limites de serviço

Nos estados-limites de serviço, as estruturas operam parcialmente no Estádio I e parcialmente no Estádio II. A transição entre esses dois comportamentos é determinada pelo momento de fissuração. Esse momento pode ser calculado utilizando a seguinte expressão aproximada.

O momento de fissuração M_r é um parâmetro crítico na análise de rigidez à flexão, pois indica o ponto em que a seção de concreto começa a fissurar. A fórmula para calcular M_r é:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (14)$$

Onde:

$\alpha = 1,2$ para seções T ou duplo T;

$\alpha = 1,3$ para seções I ou T invertido;

$\alpha = 1,5$ para seções retangulares;

Sendo α é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta;

y_t , é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

I_c , é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

F_{ct} , é a resistência à tração direta do concreto;

2.4. Rigidez à Flexão

Durante a análise técnica das estruturas, observou-se a não linearidade, que está diretamente relacionada à deformação do material sob carga. O módulo de elasticidade desempenha um papel crucial nesse contexto, pois indica a resistência do material à deformação elástica inicial. Com o surgimento de fissuras, a integridade e a capacidade de carga da estrutura são reduzidas devido à perda de continuidade da seção. O controle efetivo dessas fissuras é essencial para garantir uma inércia adequada, mantendo a estabilidade e a segurança estrutural. Isso permite que a estrutura continue suportando cargas mesmo na presença de fissuras, o que é fundamental para a durabilidade e o desempenho ao longo do tempo, a relação entre o momento fletor é descrita pela equação:

$$M = E_c \cdot I \cdot \frac{d^2 \cdot \varepsilon}{dx^2} \quad (15)$$

M , o módulo de elasticidade do concreto E_c , o momento de inércia I da seção transversal da viga e a deformação ε , na fibra neutra da viga.

Esta equação modela como a deformação na viga varia ao longo de seu comprimento devido à aplicação de um momento fletor.

Além disso, o módulo de elasticidade secante E_{cs} do concreto em relação à resistência característica à compressão f_{cm} e à deformação na compressão correspondente ε_{c1} é definido como:

$$E_{cs} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}} \quad (16)$$

Esta definição é crucial para compreender como o concreto responde à compressão e à flexão, influenciando diretamente o comportamento estrutural e o dimensionamento das estruturas.

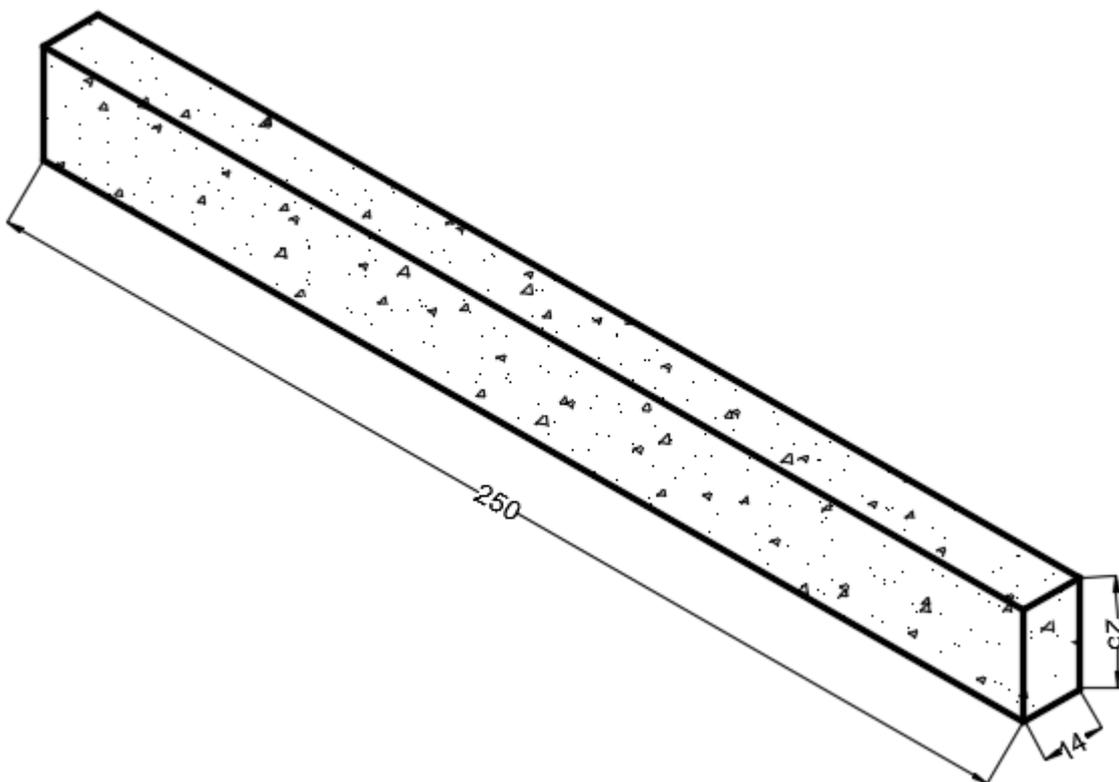
3 METODOLOGIA

Neste estudo foi realizada a moldagem de protótipos de vigas em concreto armado com o objetivo de comparar os resultados experimentais obtidos com os valores teóricos calculados. Essa análise comparativa é de suma importância para validar os modelos teóricos utilizados na engenharia estrutural, sendo de extrema importância para prever o comportamento das vigas sob cargas.

3.1 Especificação dos protótipos

Os protótipos foram dimensionados com base nas dimensões compatíveis com os equipamentos de ensaio. Portanto as vigas apresentam uma dimensão de 14 centímetros de largura, 25 centímetros de altura e 2,50 metros de comprimento como mostrado na Figura 5.

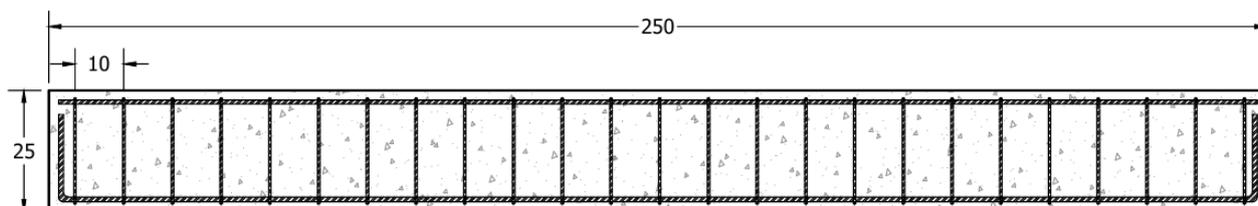
Figura 5 - Dimensão dos Protótipo



Fonte: O autor, 2024

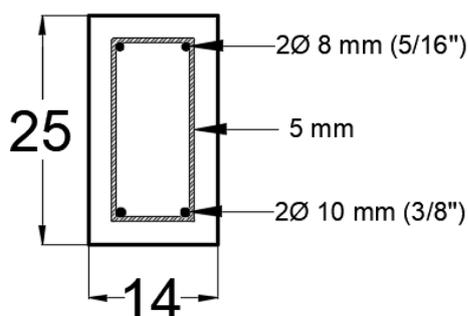
As armaduras foram projetadas para esforço cortante com estribos de 5,00mm espaçamentos de cada 10 cm. As armaduras longitudinais positivas foram compostas por 2 barras de \varnothing 10 mm e as armaduras negativas foram compostas por 2 barras de \varnothing 8 mm. O detalhamento do protótipo da viga, apresentando a disposição da armadura, é mostrado nas figuras 6 e 7.

Figura 6 - Seção longitudinal dos protótipos



Fonte: O autor, 2024

Figura 7 - Seção longitudinal dos protótipos



Fonte: O autor, 2024

3.2 Concepção dos protótipos

Os protótipos das vigas foram concebidos com o objetivo de estudar o comportamento estrutural sob cargas aplicadas. Foram preparados quatro protótipos de vigas de concreto armado. Para o pré-dimensionamento, utilizou-se concreto de classe C-25 e aço CA-50, os mesmos materiais empregados na confecção dos protótipos durante o experimento. Considerando a seção previamente definida de 14 cm x 25 cm, com um cobrimento de 2,5 cm.

3.2.1 Materiais

Os materiais utilizados na pesquisa, incluindo concreto, aço estes elementos são essenciais para a compreensão dos ensaios realizados.

3.2.2 Aço

As armaduras dos protótipos foram definidas com barras de aço CA-50 de diâmetros 8,00 mm e 10,00 mm para as barras longitudinais e barras de aço CA-60 de diâmetro 5,00 mm para as armaduras transversais.

3.2.3 Ensaios de tração nas barras de aço

Para determinar as tensões reais de escoamento dos aços usados nas armaduras, foram realizados ensaios de tração nas barras de aço. Cada bitola de aço utilizada nas armaduras dos protótipos, tanto a transversal ($\varnothing 5,00\text{mm}$) quanto as longitudinais ($\varnothing 8,00\text{mm}$ e $\varnothing 10,00\text{mm}$), foi testada três vezes até romper, durante o procedimento, aplicamos tensão nas barras até a ruptura, conforme ilustrado na figura 8. Com base nos resultados e relatórios gerados, calculamos a tensão de escoamento média para cada tipo de aço.

Figura 8 -Teste de tração nas barras de aço



Fonte: O autor, 2024

Tabela 4 - Resultado dos ensaios de tração das barras de Ø5,00mm

	Força Máxima (Kgf)	Tensões (Mpa)		Tensões Médias (Mpa)	
		Escoamento	Máxima	Escoamento	Máxima
CP1	1552.10	730.46	775.19	727.17	770.49
CP2	1528.19	720.78	763.25		
CP3	1547.76	730.26	773.02		

Fonte: O autor, 2024

Tabela 5 - Resultado dos ensaios de tração das barras de Ø8,00mm

	Força Máxima (Kgf)	Tensões (Mpa)		Tensões Médias (Mpa)	
		Escoamento	Máxima	Escoamento	Máxima
CP1	3467,23	532,99	679,44	532,55	674,97
CP2	3421,58	522,14	667,54		
CP3	3474,84	542,51	677,93		

Fonte: O autor, 2024

Tabela 6 - Resultado dos ensaios de tração das barras de Ø10,00mm

	Força Máxima (Kgf)	Tensões (Mpa)		Tensões Médias (Mpa)	
		Escoamento	Máxima	Escoamento	Máxima
CP1	5796,47	565,09	723,76	566,43	722,18
CP2	5829,08	563,86	727,83		
CP3	5725,83	570,33	714,94		

Fonte: O autor (2024)

3.2.4 Concreto

Foi realizado um concreto convencional composto por cimento, água, agregado graúdo e miúdo. Este tipo de concreto foi projetado para dar uma resistência de 25 MPa, atendendo aos requisitos dos testes e respeitando o limite de carregamento da máquina de ensaio. Essa escolha visa assegurar uma análise precisa e confiável dos materiais e processos utilizados no dia a dia.

3.2.5 Cimento

Devido à necessidade se optou por uso do Cimento Portland de Alta Resistência Inicial (CP-V ARI). Esse tipo de cimento é conhecido por alcançar elevadas resistências nos primeiros dias após a aplicação, o que permite a realização rápida do experimento. A rápida obtenção de resistência do cimento se deve a uma formulação específica proporcionando maior resistência ao concreto em um intervalo de tempo reduzido. Este cimento utilizado está de acordo com as especificações estabelecidas pela ABNT NBR 16697:2018.

3.2.6 Agregados

Os agregados escolhidos para compor o concreto são de brita 1 como agregado graúdo e a areia média como agregado miúdo. É importante ressaltar que ambos os materiais foram meticulosamente pesados, limpos e armazenados como é mostrado na figura 9 para assegurar a precisão na dosagem e estão em conformidade com as especificações estabelecidas pela ABNT NBR 7211:2022.

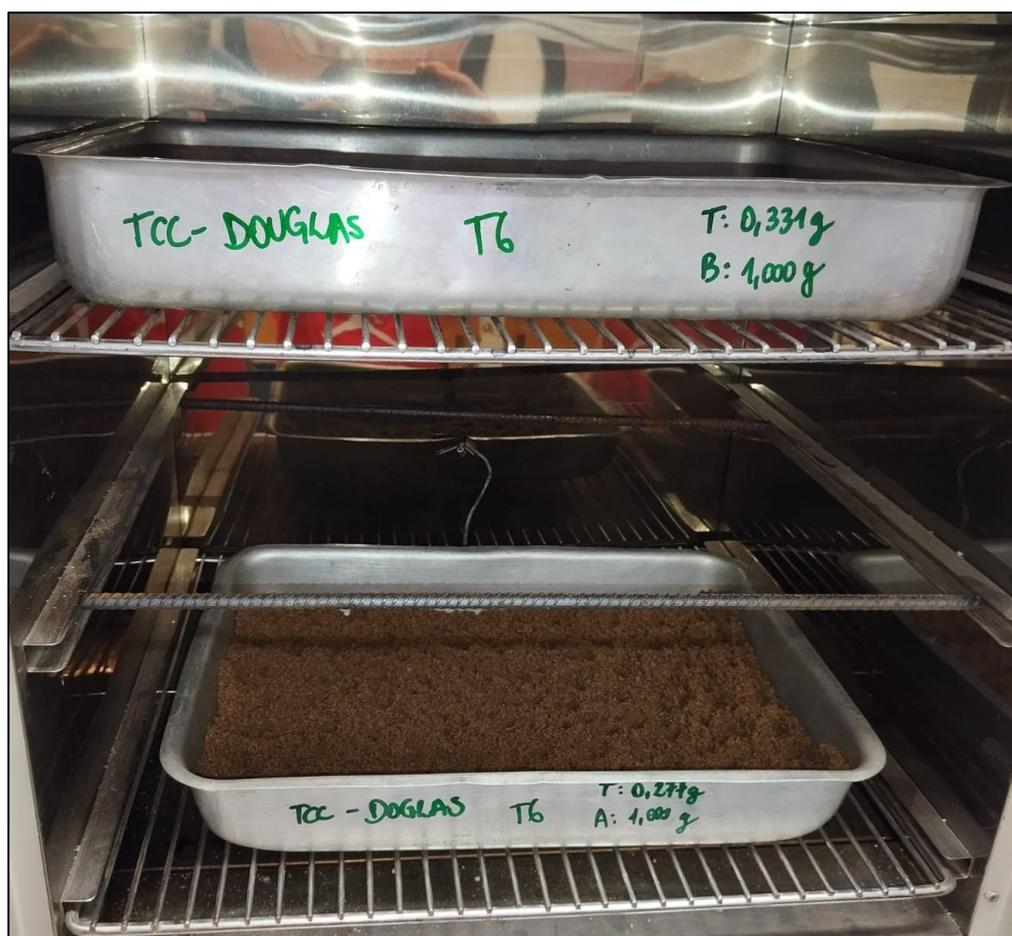
Figura 9 - Agregados graúdos e miúdos



Fonte: O autor, 2024

Esta norma define critérios rigorosos quanto à granulometria, entre outros aspectos relevantes para garantir a qualidade e adequação dos agregados destinados ao uso em concreto estrutural. Além disso, importante registrar e controlar a umidade durante o processo de produção do concreto, garantindo que esteja dentro das faixas aceitáveis conforme boas práticas de engenharia, como mostrado na figura 10 onde foi realizado a verificação de umidade dos agregados a 100°C por 24 horas. Isso proporciona uma maior precisão nos experimentos realizados.

Figura 10 - Secagem dos Agregados



Fonte: O autor, 2024

3.2.7 Dosagem

Para projetar um concreto com resistência de 25 MPa, realizou-se um estudo de traço convencional de 1:2,5:3,5:0,60 A/C, que consiste na proporção de 1 parte de cimento para 2,5 partes de areia e 3,5 partes de brita, além de 0,60 partes de água,

para cada parte de cimento. Este traço foi escolhido devido à sua capacidade de proporcionar uma boa resistência em curto período, a utilização de cimento CP-V ARI.

3.2.8 Ensaios dos CPs do concreto

Realizou-se a moldagem de três corpos de prova, dois para o teste de compressão e um para o teste de tração diametral, para garantir a precisão dos resultados. Os ensaios de compressão foram conduzidos de acordo com os procedimentos da ABNT NBR 5739:2018, utilizando equipamentos calibrados para garantir a confiabilidade dos dados, os ensaios foram realizados com 10 dias no mesmo dia dos ensaios dos protótipos para uma boa aferição dos dados. Os resultados são apresentados na Tabela 7, e a Figura 11 demonstra o ensaio de compressão realizado.

Tabela 7 - Ensaio de compressão dos CPs

Betonada		Força Máxima (Kgf)	Resistência a Compressão (Mpa)	Tensões Média Betonada (Mpa)	Tensões Média Geral (Mpa)
B1	CP1	212	26,97	27,35	30,71
	CP2	218	27,72		
B2	CP1	250	31,84	32,47	
	CP2	260	33,10		
B3	CP1	268	34,09	32,32	
	CP2	240	30,54		
B4	CP1	249	31,68	31,33	
	CP2	243	30,97		
B5	CP1	234	29,86	30,11	
	CP2	238	30,36		

Fonte: O autor, 2024

Figura 11 - Ensaio de compressão dos CPs



Fonte: O autor, 2024

A Tabela 8 apresenta os resultados obtidos para a determinação da resistência à tração por compressão diametral dos corpos de prova conforme a ABNT NBR 7222:2011, realizado com o equipamento Emic DL30000N como mostrado na figura 12.

Tabela 8 - Ensaio de compressão diametral CPs Resistência do concreto a Tração

Resistência do Concreto à Tração						
Betonada	CPs	Força (kgf) Traç. Diagonal	Força (KN) Traç. Diagonal	$F_{ct,sp}$	F_{ctm}	F_{ct}
B1	CP1	6784	66.53	0.2118	0.2360	0.2124
B2	CP1	6747	66.17	0.2106		
B3	CP1	7622	74.75	0.2379		
B4	CP1	8482	83.18	0.2648		
B5	CP1	8166	80.08	0.2549		

Fonte: O autor, 2024

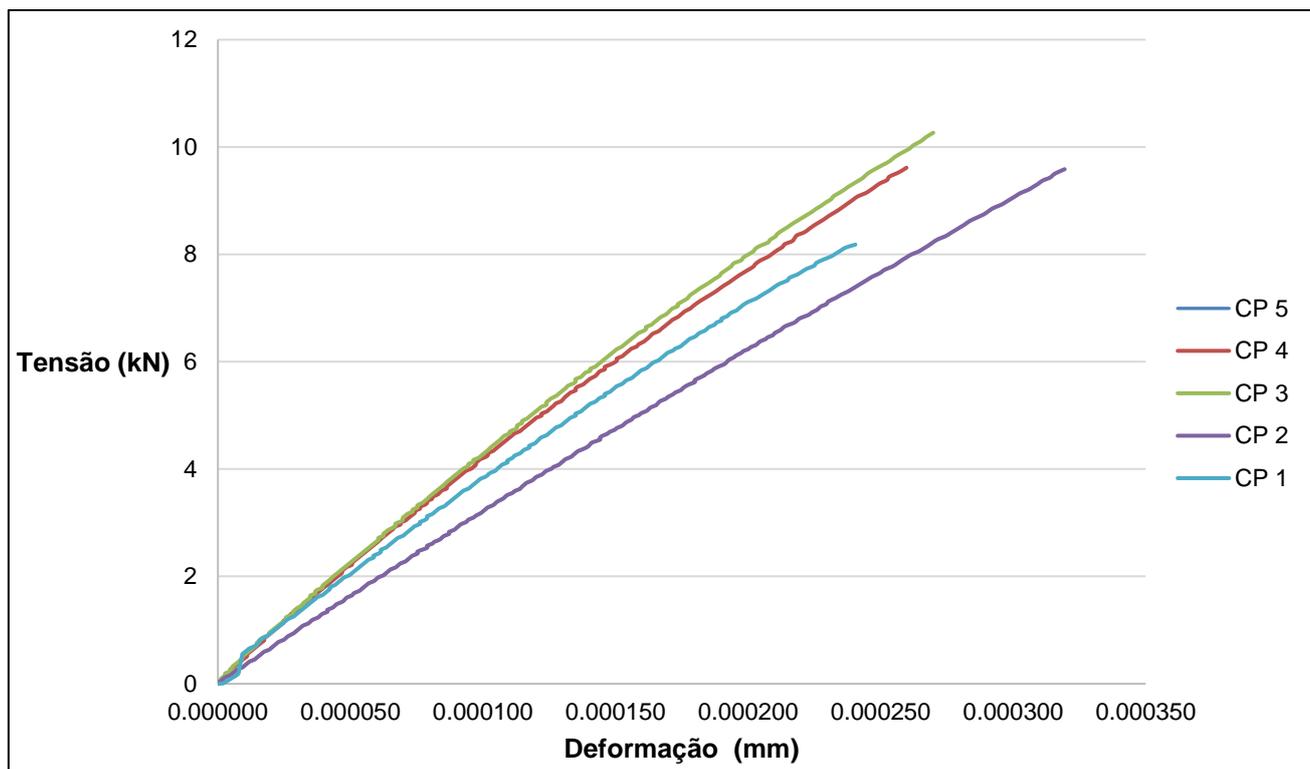
Figura 12 - Ensaio de compressão diametral CPs



Fonte: O autor, 2024

Durante os ensaios, foram obtidos os resultados do módulo de elasticidade (E_{ci}), que indicam a resistência à deformação elástica, expressa em megapascal (MPa). Esse valor pode ser analisado através da relação Tensão x Deformação, conforme mostrado no Gráfico 1. A análise dos gráficos permite observar o comportamento do material sob diferentes níveis de carga.

Gráfico 1 - Diagrama de Tensão x Deformação



Fonte: O autor, 2024

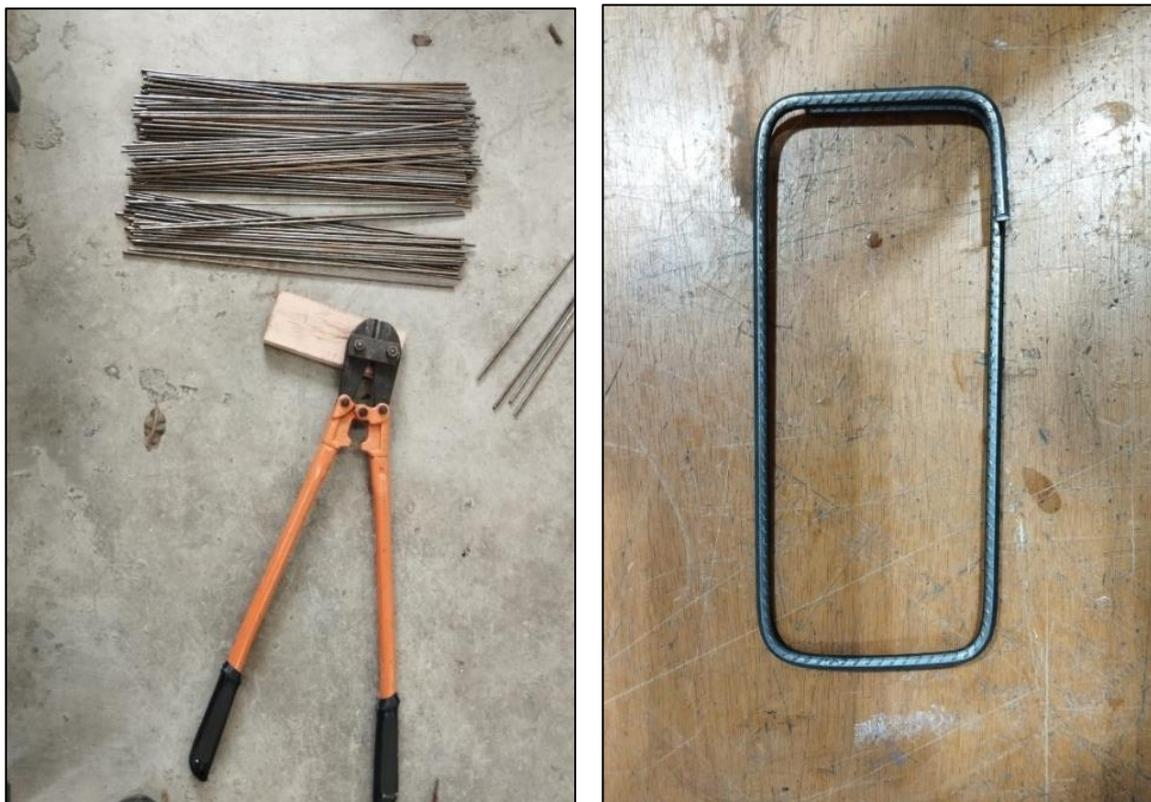
4 Confeção dos protótipos

Depois da definição dos protótipos, deu-se início à fabricação. Este processo englobou várias fases, incluindo a montagem dos moldes, a preparação das armaduras com suas respectivas amarrações, a concretagem, a remoção dos moldes, a cura molhada e os ensaios finais.

4.1 1ª Etapa Armaduras.

Nesta etapa, foram realizados os cortes e dobras das armaduras transversais e longitudinais. Conforme especificado no item 3.1.1, a armadura transversal foi definida com barras de aço CA-60 de diâmetro $\varnothing 5,00\text{mm}$ para os estribos, espaçadas a cada 10 cm. Esta escolha visa garantir que a resistência ao esforço cortante não fosse excessivamente elevada, permitindo que o rompimento das vigas em laboratório ocorresse dentro dos limites de capacidade da máquina de ensaio. Primeiramente, foi definida a geometria e a quantidade de estribos necessários para a confecção dos protótipos. De acordo com o espaçamento estipulado, cada protótipo contém 25 estribos, totalizando 100 estribos para os quatro protótipos, conforme apresentado no Figura 13. A geometria dos estribos foi calculada com base na seção da viga, seguindo as definições da NBR 6118:2023, incluindo cobrimento de 2,5 cm e dobras de 5 cm. Cada estribo possui um comprimento de 68 cm.

As barras foram medidas com uma trena e marcadas nos pontos de cortes, com um pequeno diâmetro as barras permitirão que os cortes fossem realizados com tesoura de corte de aço, e as dobras foram feitas com uma dobradeira estribo manual.

Figura 13 - Estribos \varnothing 5 cm

Fonte: O autor, 2024

A armadura longitudinal dos protótipos foi composta por 2 barras de \varnothing 10,00 mm na armadura positiva e 2 barras de \varnothing 8,00 mm na armadura negativa barras de aço CA-50. Segundo a NBR 6118:2023, apenas nas barras longitudinais de tração são obrigatórios ganchos de ancoragem. No entanto, para maior precisão e segurança dos ensaios optou-se por realizar a dobra nas armaduras positivas com 12 cm nas barras de \varnothing 10,00mm e as negativas 5,00 mm. As barras transversais foram medidas e cortadas com a tesoura de corte de aço e dobradas manualmente com o auxílio de um tubo aumentando o braço de alavanca para facilitar o processo de dobra. Após todas as armaduras devidamente cortadas e dobradas, realizou-se a amarração com arame recozido, conforme ilustrado na montagem das ferragens na Figura 14, para complementar o processo, a figura 15 mostra as quatro armaduras finalizadas.

Figura 14 - Montagem de ferragens



Fonte: O autor, 2024

Figura 15 - Armaduras finalizadas



Fonte: O autor, 2024

4.2 2ª Etapa Concretagem

Antes da concretagem, os agregados foram preparados para atender aos requisitos conforme especificado no item (3.2.6). Calculou-se o volume necessário de concreto para os quatro protótipos e três corpos de prova por betonada, determinando que seriam necessários cinco betonadas para alcançar o volume desejado. Para cada betonada, os materiais foram pesados e separados de acordo com o traço de 1:2,5:3,5:0,60 onde foi projetado para ter uma resistência de 25 MPa.

O processo teve início após as armaduras estarem posicionada e fixadas nas formas, com o espaçamento de 25 mm, iniciava-se com a brita seguido do cimento e a adição da areia na betoneira, após se adicionou a água. Antes da concretagem foi verificado cada betonada se o Slump Test está com os critérios da classe solicitada, os testes realizados ficaram entre 120 mm e 170 mm, conforme pode ser observado na Figura 16.

Figura 16 - Teste Slump



Fonte: O autor, 2024

Com o Slump aceito se realizou o transporte manual do concreto das betoneiras até as vigas. Durante o preenchimento dos protótipos das vigas com a colher de pedreiro, procedeu-se à vibração do concreto com motovibrador portátil para eliminar os vazios e bolhas de ar, garantindo a qualidade do preenchimento. O processo de betonagem foi concluído conforme planejado, seguido pelo acabamento da superfície das formas. Também foram adicionados ganchos para facilitar o manuseio das vigas com macaco hidráulico durante os ensaios (Figura 17).

Figura 17 - Protótipos concretados



Fonte: O autor, 2024

4.3 3ª Etapa Desforma e cura

Iniciou-se a fase de cura úmida do concreto 24 horas após a concretagem. Esse processo consiste na aplicação periódica de água sobre a superfície do concreto a cada 24 horas. A cura úmida é fundamental para controlar o calor gerado pela hidratação e para garantir a resistência adequada do concreto ao longo do tempo. Após completados cinco dias desde a concretagem, procedeu-se à retirada das chapas de compensado, permitindo a desforma dos protótipos.

Figura 18 - Vigas curadas



Fonte: O autor, 2024

5 Análise dos protótipos

O objetivo principal deste estudo foi comparar os resultados experimentais obtidos nos ensaios dos protótipos com as previsões teóricas, baseadas em modelos de cálculo utilizando a equação de Bischoff e a equação de Branson. A análise experimental desempenha um papel crucial na validação da eficácia dos modelos teóricos aplicados na engenharia estrutural. Os ensaios foram conduzidos incluindo testes de resistência à compressão e à tração, além da avaliação do comportamento estrutural das vigas sob carga concentrada.

5.1 Equipamentos

A máquina utilizada para os ensaios dos protótipos das vigas e dos corpos de prova, conforme mencionado no item 3.1.2, é um equipamento da marca EMIC, modelo GR048. Esta máquina é projetada para realizar ensaios de tração e compressão, possuindo um par de garras com sistema autotravante de alto desempenho e pré-aperto por sistema pneumático. A capacidade máxima de carregamento deste equipamento é de 30.000 kgf, atendendo os requisitos para o ensaio conforme descrito na NBR 5738:2016.

Figura 19 - EMIC modelo GR048

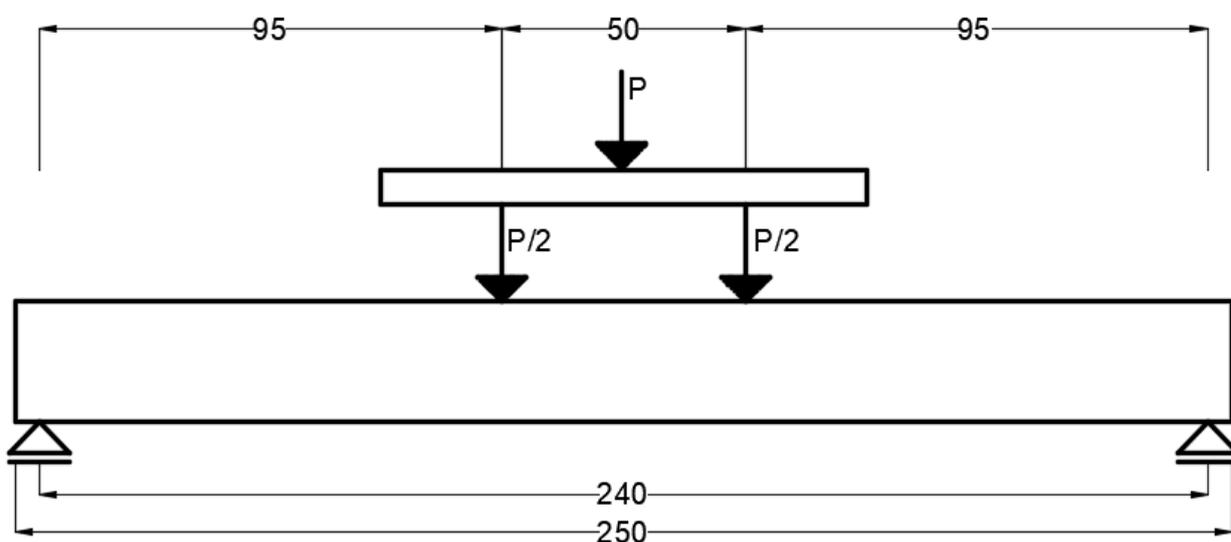


Fonte: O autor, 2024

5.2 Experimental

Para a realização dos ensaios, foi montada uma estrutura de base sobre a qual os protótipos foram apoiados. Conforme ilustrado no esquema de aplicação de cargas (Figura 20), as vigas biapoiadas foram posicionadas sobre dois apoios, onde a carga foi aplicada em um perfil metálico. Esse perfil distribui a carga por meio de roletes. A forma mais simples de representar o comportamento de estruturas de viga sob flexão é através do teste experimental de uma viga biapoiada com dois carregamentos pontuais e simétricos, de mesma intensidade, aplicados no bordo superior. Dessa forma, pelo ensaio de Stuttgart (1974) representado pela Figura 21, é possível analisar experimentalmente as deformações, deslocamentos verticais, formação e desenvolvimento das fissuras ocorridas na zona central da viga biapoiada.

Figura 20 - Esquema de aplicação de carga



Fonte: O autor, 2024

Figura 21 - Protótipo posicionado



Fonte: O autor, 2024

5.3 Resultados obtido dos protótipos

Durante o experimento, foram realizados ensaios nos protótipos para medir e analisar o comportamento de vigas de concreto submetidas a carga de flexão pura, utilizando a relação Força x Deslocamento. A flecha máxima foi registrada em milímetros através dos equipamentos, conforme normas técnicas da ABNT NBR 6118:2023.

Os resultados obtidos permitiram avaliar e comparar a resistência, a pouca ductilidade das vigas testadas forneceu dados importante para a comparação de resultados experimentais e teóricos.

As primeiras fissuras nas vigas de concreto armado começaram a aparecer quando a carga atingiu média de 25,98 kN e 30,00 kN. Esse momento crítico marca o início da formação de fissuras no concreto como mostrado na Figura 22 e 23, neste ponto a tração do material passa a exigir a armadura com isso absorver a maior parte das tensões.

Figura 22 - Momento de Fissuração 1



Fonte: O autor, 2024

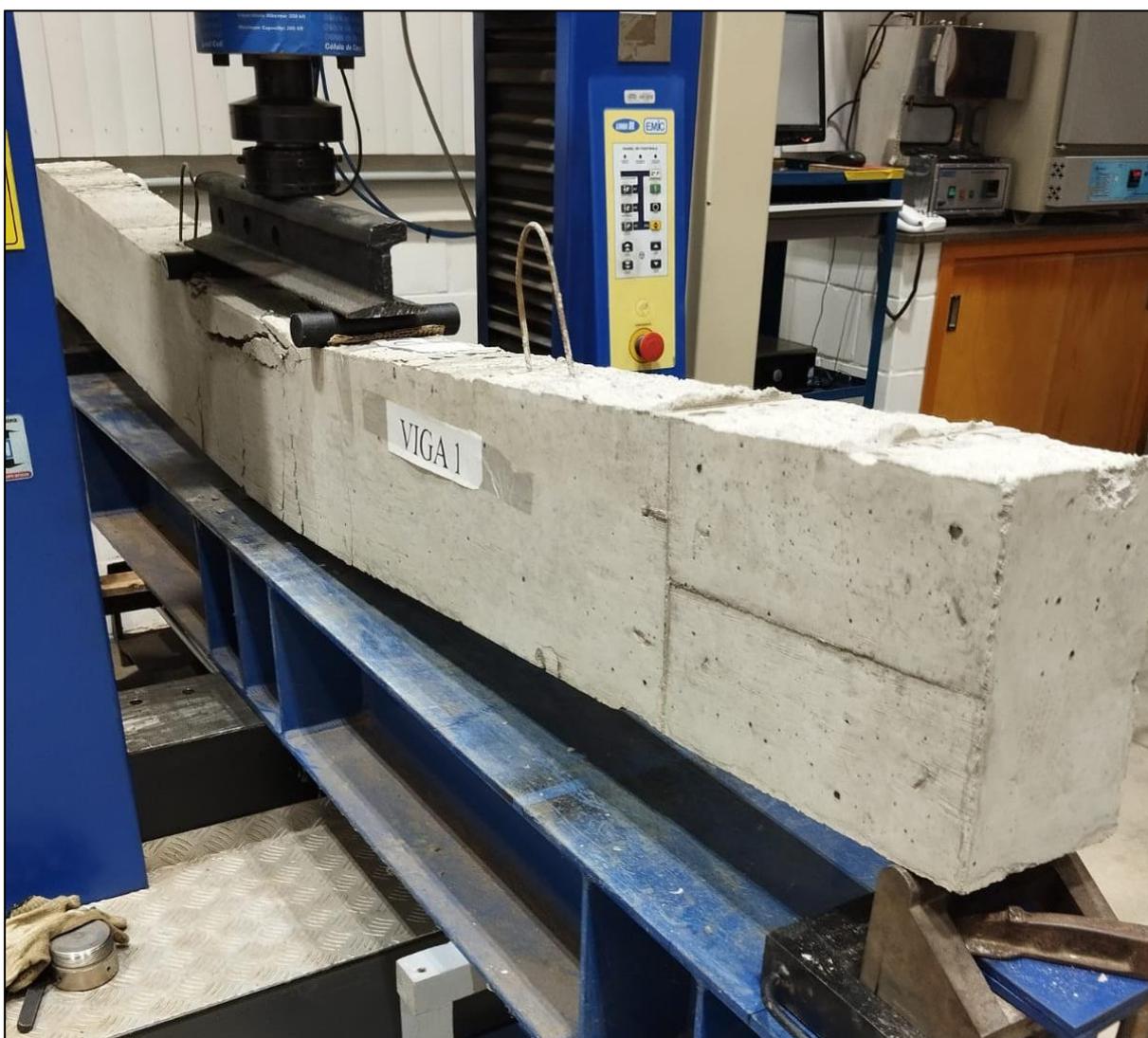
Figura 23 - Momento de Fissuração 2



Fonte: O autor, 2024

Quando as vigas atingem suas cargas máximas ocorreu a ruptura completa das vigas, com a flecha máxima média registrada de 40 mm. Este ponto de ruptura final representa a capacidade máxima de carga das vigas antes da perda total de sua integridade estrutural como representado na Figura 24. A ruptura é caracterizada por um aumento súbito na deformação e pela separação dos materiais apresentando uma baixa ductilidade das vigas testadas. Essas informações são fundamentais para compreender os limites de desempenho das vigas experimentais e comparar com os métodos teóricos de Bischoff e Branson.

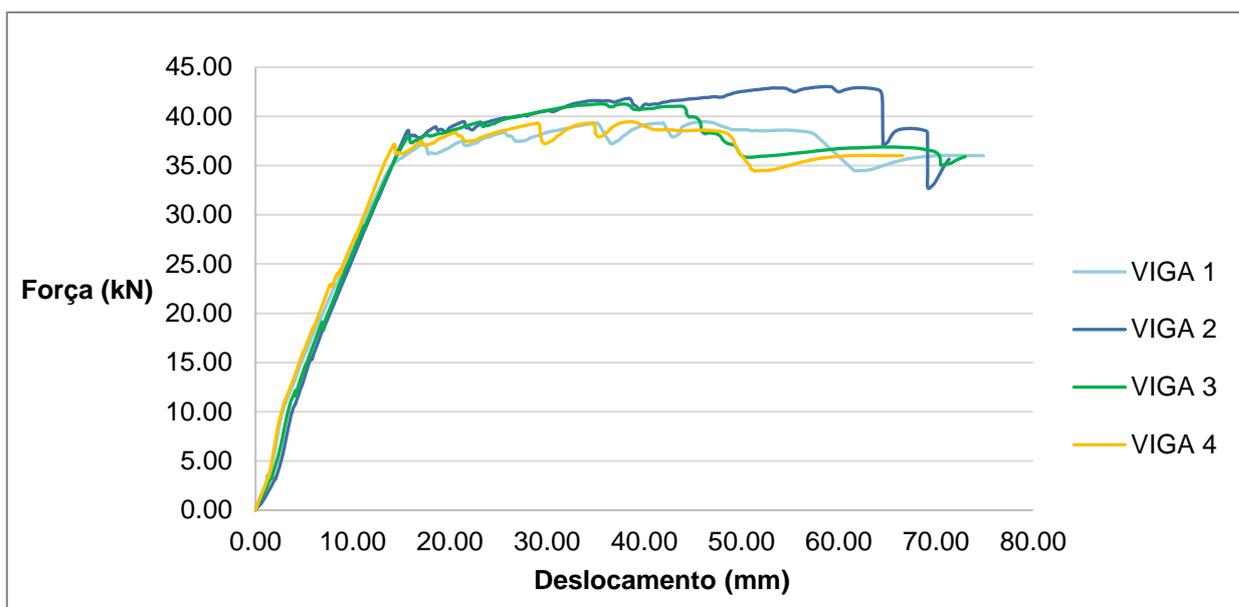
Figura 24 - Momento de Ruptura



Fonte: O autor, 2024

Os resultados obtidos demonstram claramente a resistência e rigidez das vigas testadas. A análise dos gráficos permite uma observação detalhada do comportamento do material sob diferentes níveis de carga e deformação. Esses dados são essenciais para validar as propriedades mecânicas do material, assegurando que as vigas atendam aos critérios de segurança e eficiência estrutural estabelecidos. Além disso, esses resultados fornecerão uma base comparativa ao aplicar os métodos de flecha de Bischoff e Branson.

Gráfico 2 - Força X Deslocamento - Experimental



Fonte: O autor (2024)

6. Cálculo e comparação das flechas das vigas em estudo

Este estudo visa investigar e comparar as flechas obtidas das vigas de concreto armado e comparar com os resultados objetivo através das equações de Branson e Bischoff.

Foi utilizado o método de cálculo de dois pontos de aplicação de carga como representado na figura 06, conforme apresentado por Pinheiro, Catoia e Catoia (2010). Esse ensaio é conhecido como Ensaio de Stuttgart, conforme ilustrado nas figuras acima.

$$f_{max} = \frac{P \cdot a}{24 \cdot EI} * (3 \cdot l^2 - 4 \cdot a^2) \quad (17)$$

Onde:

P , 50% da carga total aplicada sobre a viga;

a , distância de P até o apoio mais próximo do mesmo;

l , distância entre apoios.

Foram aplicados os dados conhecidos como apresentado na figura 25.

Figura 25 - Dados: Método de cálculo Pontos de aplicação

Dados					
bw (cm)	h (cm)	d (cm)	L (cm)	Eci (Mpa)	Ecs (Mpa)
14	25	22.5	240	33442.13	30158.95
Armadura			Calculo de Inércia Estágio 1		
As' (cm ²)	As (cm ²)	Es (Gpa)	αe	x_1 (cm)	I_1 (cm ⁴)
1.005	1.571	205	1.5	12.73	18229.17

Fonte: O autor, 2024

6.1 Equação de Branson – Método utilizado na NBR 6118:2023

O método de Branson é empregado na NBR 6118:2023 para definir a flecha, utilizando uma relação bilinear entre o momento e a flecha. Além disso, o modelo considera o momento de inércia equivalente (I_e) ao longo de uma seção de concreto submetida a carga, conforme determinado pela Equação 18.

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left(1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right) I_{cr} \leq I_g \quad (18)$$

Onde:

M_{cr} , Momento de fissuração;

M_a , Momento fletor;

I_{cr} , Momento de inércia da seção fissurada;

I_g , Momento de inércia para a seção bruta.

O concreto sob cargas crescentes resulta em uma redução progressiva do momento de inércia da viga. Essa redução é abordada utilizando o conceito de momento de inércia equivalente. A fórmula para o momento de inércia efetiva foi apresentada inicialmente por Branson em 1965, conforme mostrado na Equação 2, vindo a definir a rigidez equivalente, contribuindo para a avaliação precisa das deformações estruturais.

$$E \cdot I_e = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m\right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (19)$$

Onde:

E_{cs} , Momento de elasticidade secante do concreto;

M_a , Momento fletor atuante na seção mais solicitada do vão;

I_c – Momento de inércia da seção bruta de concreto no estágio I;

I_{II} , Momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II, obtida com: $\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}}$,

m , índice de acordo com o tipo de análise: igual a 4, quando a análise é de uma seção do elemento e igual a 3, quando a análise é feita ao longo da totalidade do elemento.

A NBR 6118:2023 adota o método de Branson, similar ao que era utilizado pela norma americana ACI 318 até sua última versão de 2019. No entanto, após a atualização, a ACI passou a recomendar o modelo de Branson exclusivamente para lajes e vigas em concreto protendido. De acordo com o ACI, o momento de fissuração (M_{cr}) é determinado pela Equação 20.

$$M_{cr} = \frac{(f_r + f_{pe}) \cdot I_g}{y_t} \quad (20)$$

Onde:

f_r , Módulo de ruptura do concreto;

f_{pe} , Tensão de compressão do concreto devido apenas às forças protendidas efetivas.

A equação para o momento de inércia equivalente de Branson, conhecida como Equação 16, considera a média dos momentos de inércia das partes não fissuradas e totalmente fissuradas de vigas de concreto. Essa abordagem é amplamente adotada por diversos códigos de construção como referência na NBR 6118:2023, para o cálculo das flechas imediatas.

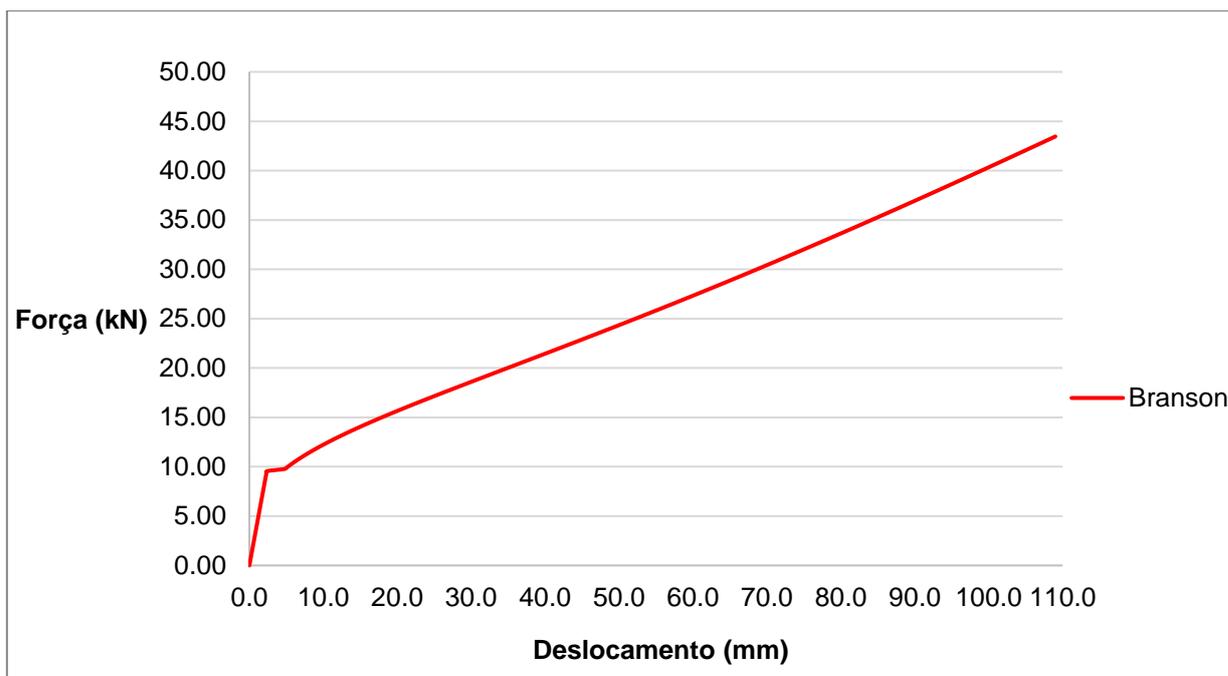
A aplicação da equação de Branson permite avaliar como as fissuras afetam a rigidez da viga ao longo do tempo de serviço da estrutura. A figura 26 apresenta os resultados obtidos através deste método, destacando a relação entre a deformação e o momento de inércia equivalente das vigas de concreto como mostrado no Gráfico 3.

Figura 26 - Dados: Método de cálculo – Branson

Cálculo Teórico de Flecha max Teórica						
Dados						
bw (cm)	h (cm)	d (cm)	L (cm)	Eci (Mpa)	Ecs (Mpa)	fctm
14	25	22.5	240	33442.13	30158.95	0.21
Armadura			Calculo de Inércia Estágio 1			
As' (cm ²)	As (cm ²)	Es (Gpa)	αe	x_1 (cm)	I_1 (cm ⁴)	fck (Mpa)
1.005	1.571	205	1.5	12.75	18229.17	40.73
Momento de Fissuração			Calculo de Inércia Estágio 2			
Υ	Mr (kNcm)	Pr (kn)	αe	x_2 (cm)	I_2 (cm ⁴)	
12.50	464.620	9.78	6.80	4.97	3406.77	

Fonte: O autor, 2024

Gráfico 3 - Flecha obtida através da equação de Branson



Fonte: O autor, 2024

6.2 Equação de Bischoff

O método de Bischoff (2005) propõe considerar o momento de inércia equivalente por meio da Equação 21.

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{(2/3)M_{cr}}{M_a}\right)^2 \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right)} \quad (21)$$

Segundo Scanlon e Bischoff (2007), a Equação 20 pode ser utilizada quando o momento fletor for maior a dois terços do momento de fissuração ($M_a > 2/3M_{cr}$). Para $M_a \leq 2/3M_{cr}$, a inércia da seção bruta (I_g) será a inércia equivalente (I_e). O ACI 318-2019 implementou o método de Bischoff (2005) para o cálculo dos deslocamentos de elementos de concreto armado, definindo nesses casos o momento de fissuração por meio da Equação 22.

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad (22)$$

Sendo:

f_r , Módulo de ruptura do concreto, sendo $f_r = 0,62\sqrt{f_{ck}}$.

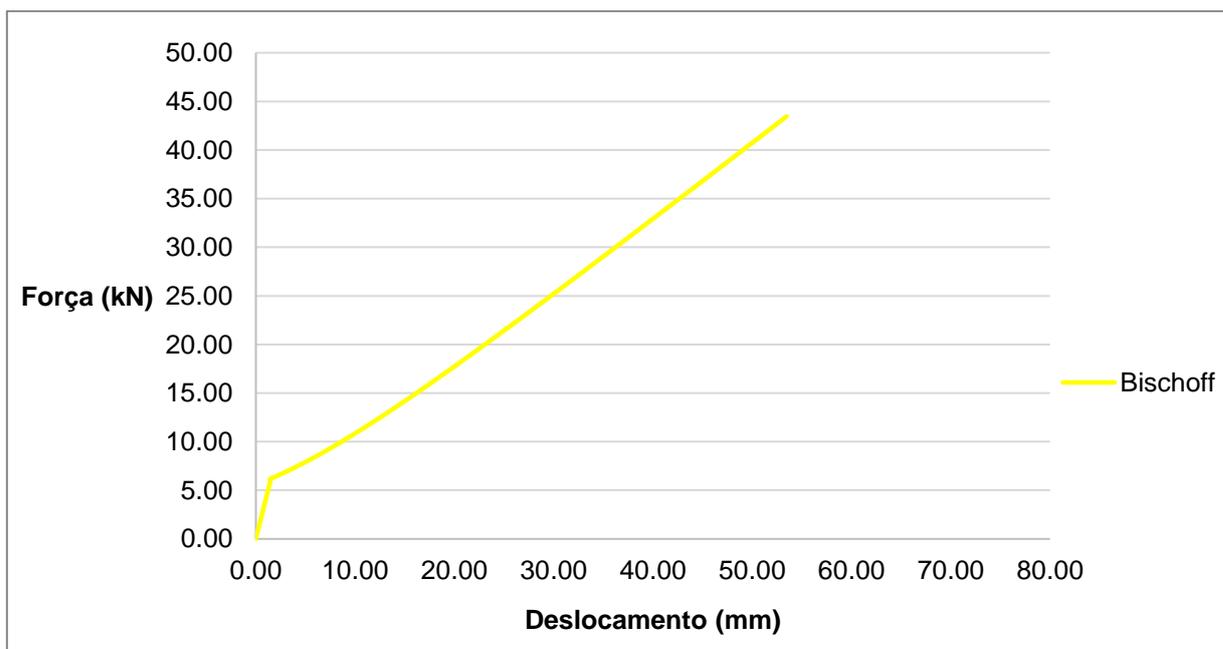
Através da Equação 22, foi obtida a nova inércia equivalente, fundamental para compreender o comportamento estrutural de elementos de concreto armado e para o dimensionamento preciso de suas deformações, conforme ilustrado nas Figuras 27 e Gráfico 4.

Figura 27 - Dados: Método de cálculo Brischoff

Cálculo Téorico de Flecha max Teórica						
Dados						
bw (cm)	h (cm)	d (cm)	L (cm)	Eci (Mpa)	Ecs (Mpa)	fctm
14.00	25.00	22.50	240.00	33442.13	30158.95	0.21
Armadura			Calculo de Inércia Estágio 1			
As' (cm ²)	As (cm ²)	Es (Gpa)	αe	x_1 (cm)	I_1 (cm ⁴)	fck (Mpa)
1.01	1.57	205.00	1.50	12.75	18229.17	40.73
Momento de Fissuração			Calculo de Inércia Estágio 2			
Υ	Mr (kNcm)	Mr (kNcm)2/3	Pr (kn)	αe	x_2 (cm)	I_2 (cm ⁴)
12.50	442.50	295.00	9.78	6.80	4.97	3406.77

Fonte: O autor, 2024

Gráfico 4 - Flecha obtida através da equação de Bischoff



Fonte: O autor, 2024

6.3 Cálculo do Momento de Resistência da Viga experimental

O cálculo do momento de resistência da viga é fundamental para garantir a segurança e a durabilidade das estruturas de concreto armado, também conhecido como momento resistente, que uma viga pode suportar antes de atingir a falha. Ele depende das propriedades dos materiais concreto, aço e da geometria da seção transversal e da distribuição das tensões na seção.

Para o cálculo do momento de resistência de uma viga de concreto armado. Cálculo da Força de Compressão no Concreto F_c e na Armadura F_t , foi realizado pelas equações 23 e 24.

$$F_t = A_s \cdot f_{yd} \quad (23)$$

Onde:

A_s é a área da armadura longitudinal de tração;

f_{yd} é a tensão de escoamento do aço.

$$F_c = b_w \cdot x \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \quad (24)$$

Onde:

b_w é a largura da seção transversal da viga;

x é a profundidade do bloco de compressão;

f_{cd} é a tensão de escoamento do aço.

Equilíbrio das Forças na Seção:

$$F_c = F_t \quad (25)$$

Cálculo do Momento Resistente Nominal M_{rd}

$$M_{rd} = F_t \cdot z \quad (26)$$

Onde:

z é a altura útil da seção, calculada como

$$z = d - 0,4 \cdot x \quad (27)$$

Onde:

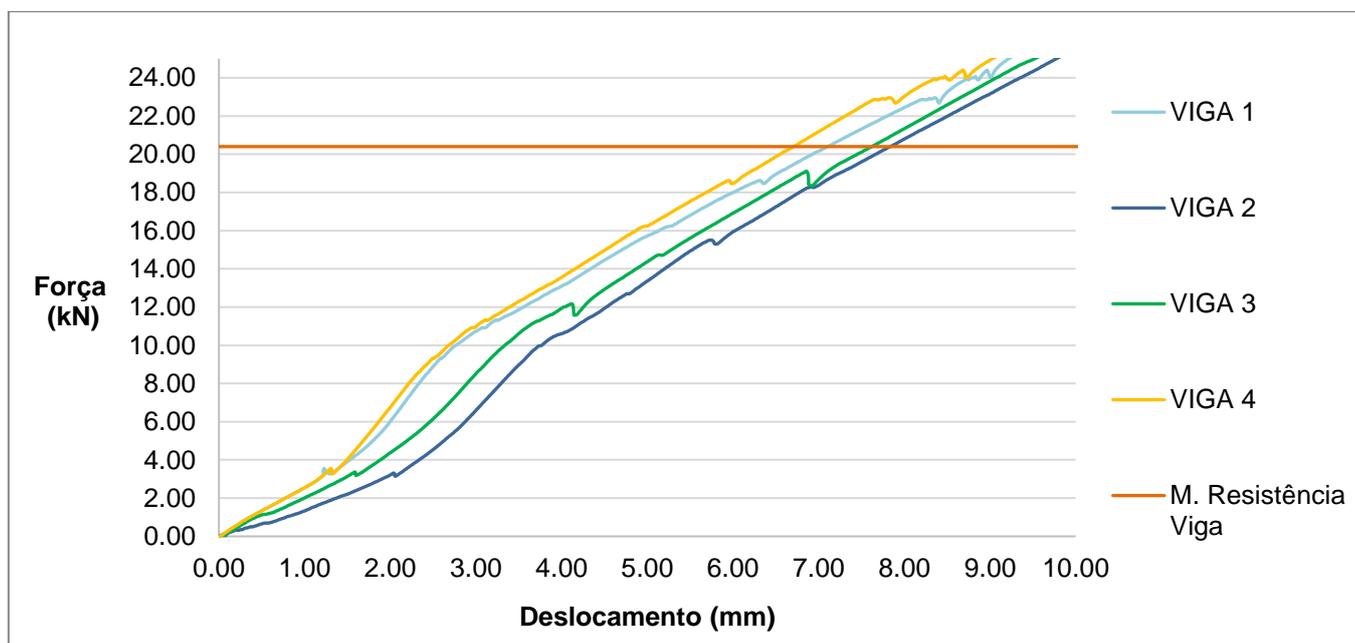
d é a distância da fibra mais comprimida até o centroide da armadura tracionada;

x é a profundidade do bloco da compressão;

f_{cd} é a tensão de escoamento do aço.

Após realizar os cálculos do momento fletor resistente, verificou-se que, ao considerar uma força de cálculo ajustada de $F_d=20,4\text{kN}$, o momento fletor resistente calculado para a viga é de $M_{rd} = 1447,23 \text{ kN.cm}$, este valor é superior ao momento solicitante de $M_s = 1020 \text{ kN.cm}$, garantindo a segurança estrutural da viga, conforme os critérios estabelecidos pela NBR 6118:2023. No entanto, é crucial observar que, ao exceder a força de cálculo de $20,4 \text{ kN}$, as vigas começam a perder sua capacidade de carga, como mostrado no gráfico 5. Após esse ponto, as vigas sofrem deformações excessivas, conhecidas como flechas, que comprometem a integridade estrutural e a funcionalidade da construção.

Gráfico 5 - Momento de Resistência da Viga experimental



Fonte: O autor, 2024

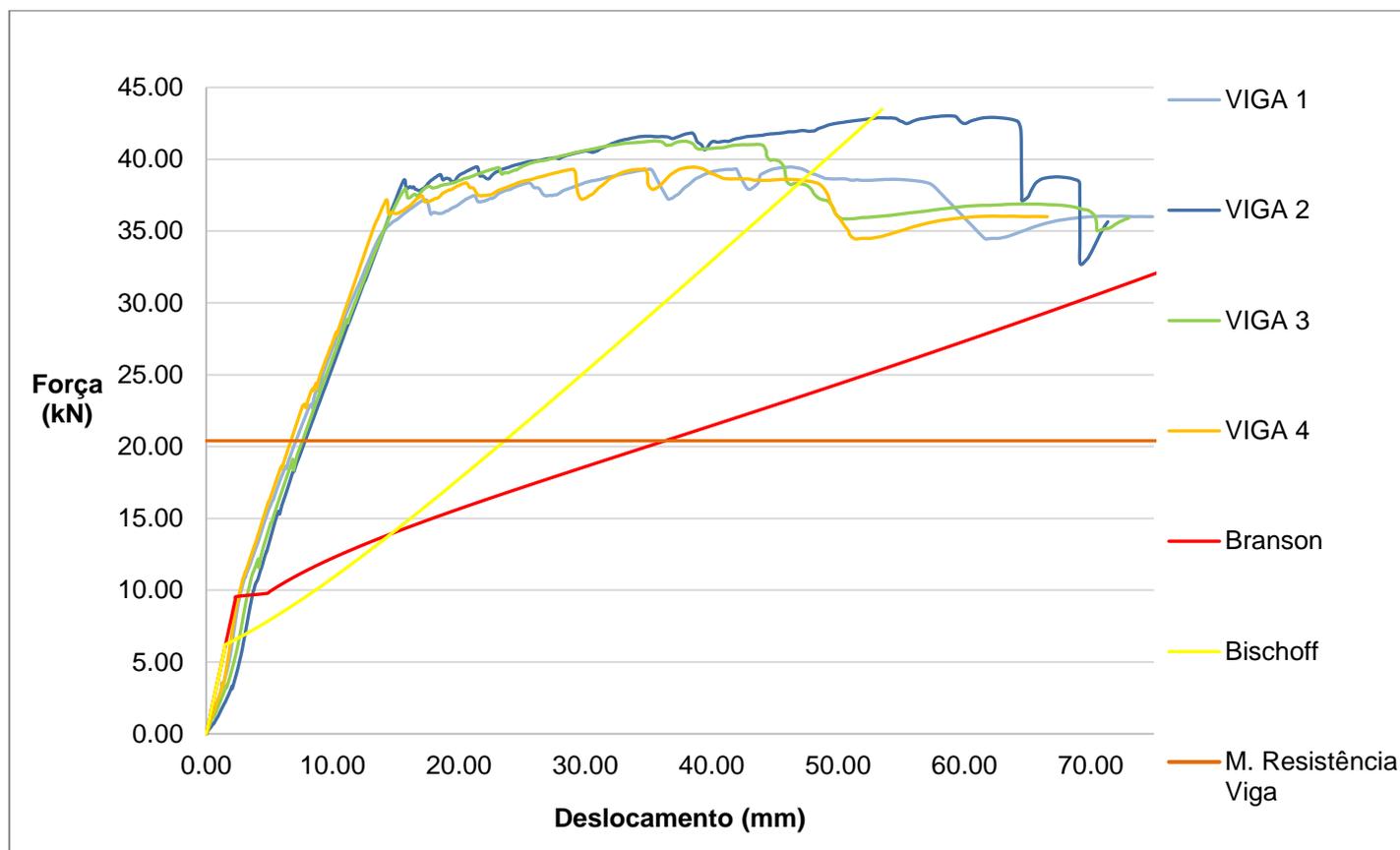
7.0 Análise de resultados

Após realizar os cálculos detalhados do momento fletor resistente, foi possível avaliar o comportamento das vigas de concreto armado sob carga de flexão pura. Durante os experimentos, foram conduzidos ensaios para registrar a relação entre força e deslocamento, determinando a flecha máxima das vigas conforme as normas técnicas da ABNT NBR 6118:2023. Esses dados são cruciais para analisar a resistência, rigidez e ductilidade das vigas, oferecendo uma base comparativa para os métodos teóricos de Branson e Bischoff.

Os resultados experimentais evidenciaram claramente a robustez e rigidez das vigas testadas. A análise dos gráficos de força x deslocamento permitiu uma observação detalhada do comportamento do material sob diferentes níveis de carga e deformação. Essas informações são essenciais para validar as propriedades mecânicas do material e assegurar que as vigas atendam aos critérios de segurança e eficiência estrutural estabelecidos. Além disso, os resultados proporcionam uma base comparativa ao aplicar os métodos de flecha de Branson e Bischoff.

Os experimentos realizados nas vigas de concreto armado demonstraram um comportamento típico sob cargas progressivas. Foi observado que ao superar a força de cálculo ajustada de 20,4 kN, as flechas aumentaram exponencialmente, conforme demonstrado no gráfico 6. As vigas experimentais suportaram até 35,6 kN antes de perder completamente sua capacidade de carga e comprometer a integridade estrutural.

Gráfico 6 - Análise de resultados



Fonte: O autor, 2024

Os cálculos realizados através do método de Bischoff para os experimentos, após a fase elástica das vigas, indicam que, até $2/3$ do momento de cálculo, as flechas apresentam resultados superestimados em relação às flechas reais. Após os $2/3$ do momento de cálculo, as flechas se aproximam dos valores reais, demonstrando uma maior precisão.

Os cálculos realizados através do método de Branson indicam que, até $2/3$ do momento de cálculo, as previsões se aproximam dos valores reais, sendo menos conservadoras. Após os $2/3$, a equação superestima a flecha, apresentando valores de até cinco vezes maiores do que os valores reais. A análise comparativa dessas metodologias é essencial para assegurar a segurança e eficiência das estruturas de concreto armado, especialmente em vigas biapoiadas.

Com base nesses cálculos realizados, o método de Bischoff apresenta maior conservadorismo nos estágios iniciais de carregamento. Quando a carga atinge $2/3$

do momento de cálculo, observa-se que as flechas calculadas pelo método de Bischoff começam a ser menores em comparação com as calculadas pelo método de Branson.

A inércia após o momento de fissuração foi a única variável que variou durante a aplicação das equações, impactando diretamente na flecha dos métodos. Em termos numéricos, as flechas calculadas pelos dois métodos apresentaram diferenças significativa por se tratar de protótipos convencionais. Observa que se a importância de considerar cuidadosamente o momento de inércia ao aplicar métodos teóricos como Branson e Bischoff no cálculo das flechas em vigas biapoiadas de concreto armado.

Apesar das diferenças dos resultados, os métodos se mostraram satisfatórios na previsão das deformações das vigas, garantindo que as estruturas projetadas atendam aos critérios de segurança, estabelecendo uma maior confiabilidade na flecha a se obter através dos cálculos.

8. Conclusão

Neste estudo os métodos das equações de Branson e Bischoff já presentes nas normas NBR 6118:2023 e pelo Eurocódigo 2, a sua utilização pode variar significativamente em vigas com variações no momento de sua inércia inicial e inércia no momento de resistência. Os resultados obtidos através dos ensaios experimentais, proporcionam uma compreensão do comportamento das vigas de concreto armado, validando os métodos de cálculo e assegurando que as estruturas projetadas atendam aos requisitos de segurança e durabilidade estabelecidos para seu bom funcionamento.

A comparação dos métodos de Branson e Bischoff e os resultados experimentais apresentam uma precisão para a aplicação desses métodos no dimensionamento e na avaliação das deformações em vigas de concreto armado. Durante esta pesquisa, foram analisadas quatro vigas, cada uma apresentando seu próprio gráfico de Força X Deslocamento. A análise comparativa desses gráficos revelou que, embora as curvas obtidas pelos métodos (Branson e Bischoff) tenham sido próximas entre si, encontraram-se divergentes das curvas experimentais. Essas diferenças de comportamento estão diretamente relacionadas aos fatores que influenciam o deslocamento das vigas de concreto armado, em virtude do efeito das fissuras durante o estágio II do concreto.

Portanto, é importante considerar as variações no momento de inércia ao aplicar os métodos teóricos de cálculo. A pesquisa indica que os métodos de cálculos de Branson e Bischoff podem não prever com precisão o comportamento estrutural como apresentado na pesquisa, especialmente em vigas biapoiada a partir do ponto em que ocorrem mudanças no momento de inércia, após o momento de fissuração da viga sendo a única variável que variou durante a aplicação das equações, impactando diretamente na flecha dos métodos, estes métodos majoram as flechas a favor da segurança. Apesar das diferenças nos resultados, os métodos se mostraram satisfatórios na previsão das deformações das vigas, garantindo que as estruturas projetadas atendam aos critérios de segurança, estabelecendo uma maior confiabilidade na flecha a se obter através dos cálculos.

9 Referência

ALMEIDA, M.D. Análise de flechas em vigas de concreto armado. 2010. 89p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Ceará, Fortaleza, 2010.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318: Building Code Requirements for Structural Concrete. Farmington Hills, MI: ACI, 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 5739: Concreto – Ensaio de compressão de corpos-de-prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2018.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2023.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7211: Agregados para concreto - Especificação. Rio de Janeiro, 2022.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7222: Concreto – Determinação da resistência à tração na flexão de corpos-de-prova prismáticos. Rio de Janeiro, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8522: Concreto – Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão. Rio de Janeiro, 2021.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 16697: Cimento Portland - Requisitos. Rio de Janeiro, 2018.

BISCHOFF, P. H. Reevaluation of Deflection Prediction for Concrete Beams Reinforced with Steel and Fiber Reinforced Polymer Bars. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 131, n. 5, p. 752-762, 2005.

BRANSON, D. E. Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams. State of Alabama Highway Dept.: Bureau of Research and Development, 1963.

BRANSON, D. E. Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams. Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, Alabama (Department of Civil Engineering and Auburn Research Foundation), Auburn University, 1965.

EUROCODE 2: Design of Concrete Structures. European Committee for Standardization, 2004.

GILBERT, J. Cálculo de Estruturas de Concreto Armado. São Paulo: Editora Científica, 2011.

GIAMMUSSO, P. A. Analysis of Structural Behavior in Reinforced Concrete Beams. Rome: Engineering Press, 1992.

GOMES, R. F.; LIMA, J. A. Análise das Deformações em Vigas de Concreto Armado Utilizando Modelos de Cálculo Numérico. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Estrutural, 15., Anais... São Paulo: ABPEE, 2019.

LAZZARI, E. B. Structural Analysis of Concrete Beams. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

Lei de Hooke. *Definição da relação entre tensão e deformação em materiais elásticos lineares.*

PINHEIRO, L. M. Fundamentos do concreto e projeto de edifícios. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2007.

PINHEIRO, L. M.; COTOIA, P. R.; COTOIA, S. R. Estruturas de Concreto Armado: Projeto e Detalhamento. São Paulo: Editora Científica, 2010.

Stuttgart University. Ensaio de flexão em vigas de concreto armado. Stuttgart, Alemanha, 1960.